

**EIN NICHTHYDROSTATISCHES FINITE-ELEMENTE-MODELL
ZUR SIMULATION STATIONÄRER KONVEKTION
ÜBER ZWEIDIMENSIONALER TOPOGRAPHIE**

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

des

Fachbereichs Geowissenschaften

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Klaus-Michael Riesener

aus Aken/Elbe

1983



Digitized by the Internet Archive
in 2026

EIN NICHTHYDROSTATISCHES FINITE - ELEMENTE - MODELL
ZUR SIMULATION STATIONÄRER KONVEKTION
ÜBER ZWEIDIMENSIONALER TOPOGRAPHIE

INAUGURAL - DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

des

Fachbereichs Geowissenschaften

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Klaus - Michael Riesener

aus Aken

Diese Arbeit wurde am Institut für Theoretische Meteorologie im Fachbereich Geowissenschaften der Freien Universität Berlin bei Prof. Dr. H. Fortak angefertigt.

Sie wurde unterstützt von der Deutschen Forschungsgemeinschaft im Rahmen des Schwerpunktprogramms "Physikalische Grundlagen des Klimas und Klimamodelle".

Berlin 1983

D 188

1. Gutachter : Prof. Dr. H. Fortak

2. Gutachter : Prof. Dr. W. Zdunkowski

Tag der mündlichen Prüfung : 25.7.1983

INHALT

EINLEITUNG	1
1. DIE MATHEMATISCHEN GRUNDLAGEN DES MODELLS	4
1.1 Die Methode der Gewogenen Residuen	4
Die <i>GALERKIN</i> -Variante der Gewogene-Residuen-Methode	6
Die Berücksichtigung von Randbedingungen	7
1.2 Das Finite-Elemente-Konzept	9
Der elementweise Aufbau der globalen <i>GALERKIN</i> -Gleichungen	13
Die Berücksichtigung der Randbedingungen auf der Elementebene	14
1.3 Die Vorzüge der Finite-Elemente-Methode	17
2. DAS MODELLGLEICHUNGSSYSTEM	20
2.1 Die physikalischen Modellapproximationen	20
2.2 Das Differentialgleichungssystem	24
Die Schließungsannahmen für die turbulente Viskosität	25
Das dimensionslose Modellgleichungssystem	26
2.3 Die Randbedingungen	29
Randbedingungen für $\mathbf{v}$	30
Randbedingungen für ϑ	39
Die Drucknormierung	40
2.4 Das System der globalen <i>GALERKIN</i> -Gleichungen	43
Die Bewegungsgleichung	43
Der 1. Hauptsatz	48
Die Kontinuitätsgleichung	49

3.	DIE FINITE - ELEMENTE - DISKRETISIERUNG	50
3.1	Die Auswahl des Elementes	50
3.2	Elementeinteilung der Integrationsgebiete und Knotenpunktverteilungen	51
3.3	Element - Diskretisierung der GALERKIN - Gleichungen	54
3.4	Lokale Elementkoordinaten und Basisfunktionen	61
3.5	Die Elementbeiträge im lokalen Koordinatensystem	64
4.	DIE MODELL - NUMERIK	70
4.1	Berechnung der Elementmatrizen	70
4.2	Die Lösung des Gesamtsystems	72
	Die NEWTON - RAPHSON - Iteration	76
	Die Front - Variante des GAUSS - Algorithmus	79
	Konvergenz und Konvergenzgeschwindigkeit	83
	Die lineare Startnäherung	88
4.3	Berechnung der Ableitungen an den Knotenpunkten	91
5.	DIE ERGEBNISSE DER MODELLEXPERIMENTE	93
5.1	Übersicht über das numerische Experimentprogramm	93
5.2	Die Experimente mit der Bergtopographie	95
	Der Einfluß von $ \mathbf{v}_{h,g} $ und γ_g auf die Bergüberströmung	95
	Variation der Anströmungsrichtung	131
	Asymmetrische Topographieprofile	136
	Numerische Experimente zur freien Konvektion	139
5.3	Die Experimente mit der Taltopographie	147
5.4	Beschleunigungsanalyse	153
	ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK	162
	LITERATUR	164

Symbolliste



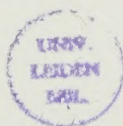
EINLEITUNG

In der vorliegenden Arbeit wird ein nichtlineares und nichthydrostatisches Finite-Elemente-Modell zur Simulation stationärer Konvektion über steiler zweidimensionaler Topographie präsentiert. Dieses Modell wurde vom Verfasser entwickelt und zur Durchführung einer umfangreichen numerischen Experimentreihe eingesetzt, deren Ergebnisse hier ebenfalls diskutiert werden.

Die Arbeit war aus dem Wunsch erwachsen, mesoskalige Strömungsphänomene untersuchen zu können, bei denen es wesentlich auf nichthydrostatische Druckbeschleunigungen und vor allem konvektive Trägheitsbeschleunigungen ankommt. Solche Erscheinungen sind charakteristisch für die Überströmung steiler Topographie. Von besonderem Interesse für die Meteorologie sind hierbei Leewellen, Grenzschichtablösungen mit Rückströmung im Anströmungslee, Blockierung im Luv sowie Strömungsablösung und Rotorbildung unter Leewellen. Insbesondere die im Gefolge der Grenzschichtablösungen entstehenden "Totwassergebiete" in der Umgebung steiler Hänge dürften von großer Bedeutung für die Meteorologie der Luftbeimengungen bzw. deren Ausbreitung sein. Die Ablösungen haben darüberhinaus maßgeblichen Einfluß auf den resultierenden Druckwiderstand von umströmten Hindernissen. Insofern ist eine quantitativ zuverlässige Modellierung dieser Phänomene in einem weiten Bereich räumlicher Scales unentbehrlich.

Die genannten mesoskaligen Strömungserscheinungen hängen z.T. sehr sensibel ab vom hydrodynamischen Zustand der ungestörten Anströmung, den thermischen Randbedingungen und der Geometrie des Erdbodens. Deshalb war von vornherein klar, daß eine große Anzahl numerischer Experimente mit systematischer Parametervariation durchgeführt werden mußte, um zu verallgemeinerungsfähigen Befunden zu gelangen, vor allem aber, um hydrodynamische Deutungsversuche der Ergebnisse unternehmen zu können.

Ursprünglich bestand die Hoffnung, dieses Vorhaben auf der Basis bzw. durch Weiterentwicklung bestehender Simulationsmodelle durchführen zu können. Leistungsfähige nichtlineare Modelle zur Simulation mesoskaliger Strömungen über unebenem Gelände standen zu dieser Zeit bereits in großer Zahl zur Verfügung. Stellvertretend seien hier diejenigen von ANTHES, WARNER [4], MAHRER, PIELKE [39], TAPP, WHITE [68], WIPPERMANN, WALLBAUM [76] genannt. Unter denjenigen, die eine nichthydrostatische Simulation zuließen, schien am ehesten die Modellkonzeption von WIPPERMANN und WALLBAUM geeignet. Ein überzeugender Leistungsnachweis für die zweidimensionale Version dieses Modells wurde von WIPPERMANN und GROSS [75] mit der Konstruktion einer Bodenwindrose für die Stadt Mannheim in Abhängigkeit von der Häufigkeitsverteilung des geostrophischen Windes vorgelegt. Die Hoffnung, dieses oder ein ähnliches Modell für die geplante Anwendung auf die Überströmung steiler Topographie umrüsten zu können, mußte wegen der Forderung, mit vertretbarem Rechenaufwand umfangreiche Experimentreihen durchführen zu können, verworfen werden. Trotz des numerischen Zugeständnisses in Gestalt einer modifizierten "upstream"-Differenzendiskretisierung in den Modellgleichungen, mit der Konvergenz auch für beliebige hohe REYNOLDS-Zahlen erzwungen wird, erfordert die zeitliche Integration



des Anfangs - Randwertproblems Rechenzeiten in der Größenordnung der Realzeit. Wegen der hohen effektiven Viskosität von upstream-Differenzenapproximationen (s. z.B. ROACHE [57]) ist die Anwendung solcher Modelle auf Phänomene mit kleinen *REYNOLDS*- bzw. *PÉCLET*-Zahlen beschränkt. Simulationen von Strömungen mit wesentlichem Einfluß der Trägheitsbeschleunigungen und Temperaturadvektionen führen zwar zu numerisch stabilen, physikalisch aber u.U. völlig bedeutungslosen Ergebnissen (vgl. hierzu PIELKE [50], MOLENKAMP [43], PINDER, GRAY [52], LEONARD [34]). Dies äußert sich häufig so offenkundig, daß Wirbel, wie insbesondere der Leerotor unter der abgehobenen Grenzschicht viel zu schwach bzw. sogar überhaupt nicht im berechneten Strömungsfeld erscheinen (s. z.B. GRESHO, LEE [23]).

Eine instationäre Modellierung unter Verzicht auf upstream-gewichtete Diskretisierungen hätte zu Rechenzeiten geführt, mit denen eine Realisierung zahlreicher Simulationen unmöglich gewesen wäre. Konsequenterweise mußte darauf verzichtet werden, stationäre Strömungserscheinungen als Lösungen eines Anfangs - Randwertproblems zu suchen, die unter stationären Rand- bzw. Quellbedingungen gegen zeitunabhängige Variablenverteilungen konvergieren. Ein solchermaßen mit großem Leistungsaufwand verwendetes instationäres Simulationsmodell erscheint ohnehin zweckentfremdet, wenn das Interesse nicht dem Adaptationsvorgang selbst gilt. Stattdessen wurde hier versucht, die Variablenfelder der vermuteten stationären Strömungszustände von vornherein als Lösungen des entsprechenden Randwertproblems zu gewinnen. Mathematisch bedeutet das keinerlei Vereinfachung. An die Stelle des Problems der Formulierung von Anfangsbedingungen, die einen stabilen zeitlichen "Einschwingvorgang" garantieren, tritt beim reinen Randwertproblem die äquivalente Aufgabe der Beschaffung einer hinreichend nahe bei der wahren Lösung liegenden Startnäherung für die nichtlineare Iteration. Die Stabilisierung eines zeitlichen Integrationsschemas hat ihr Gegenstück im ebenso zentralen Problem der Konstruktion einer konvergenten Folge von Lösungen des algebraisierten nichtlinearen zeitunabhängigen Gesamtsystems. Der entscheidende Gewinn liegt allein in einer unvergleichbar geringeren Rechenzeit zur Durchführung der kompletten Simulation eines stationären Strömungszustandes.

Die Rechtfertigung einer stationären Modellkonzeption steht und fällt mit der Gültigkeit zweier Voraussetzungen: 1) bei zeitunabhängigen Rand- und Quellbedingungen realisiert die Atmosphäre stationäre Strömungen, 2) die Lösung des Randwertproblems ist identisch mit der im Grenzfall $t \rightarrow \infty$ erhaltenen instationären Lösung des zugeordneten Anfangs - Randwertproblems. Beide Voraussetzungen sind allgemeingültig nicht zu beweisen und können nur als Arbeitshypothesen gewertet werden. Ihre Rechtfertigung kann allein anhand der erzielten Ergebnisse geprüft werden. Hierauf wird im Verlauf der Ergebnisdiskussion im Kapitel 5 noch eingegangen.

Die Ausgangsposition, ohnehin ein eigenes Modell konzipieren zu müssen, wurde genutzt, um gleichzeitig eine Alternative zu den üblichen Versuchen, im Rahmen numerischer Simulation das Problem der Anpassung an irreguläre Gebietsberandung zu lösen, anzubieten.

In der Meteorologie basiert die überwiegende Anzahl der numerischen Simulationsmodelle auf der Differenzenmethode. Das gilt in besonde-

rem Maß für die Modelle zur Simulation mesoskaliger Strömungen. Im Rahmen globaler Zirkulationssimulationen hat man schon früh eine vorteilhafte Alternative in Gestalt der Spektralmodelle auf der Basis globaler *FOURIER*-Repräsentation der Variablenfelder erfolgreich entwickelt. Bei der mesometeorologischen Modellierung konzentrieren sich dagegen fast alle Anstrengungen noch immer darauf, mit den gerade hier deutlich werdenden Nachteilen einer Differenzendiskretisierung fertigzuwerden, obwohl seit einiger Zeit eine vielversprechende Alternative in Gestalt des Finite-Elemente-Konzepts bereitsteht. Dieses Konzept ist ursprünglich ohne Bezug zu Differentialgleichungsproblemen im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie für die Belange der Baustatik entwickelt worden. Die Formulierung und Zusammenfügung der Spannungs-Dehnungsbeziehungen für diskrete Elemente ganzer Baukonstruktionen hat sich bei der Planung von Tragwerken, Autokarosserien, Flugzeugen und neuerdings sogar Knochenplastiken glänzend bewährt. Über die Möglichkeit, Differentialgleichungsprobleme mit Hilfe von Variationsformulierungen bzw. allgemeiner mit Hilfe des Konzepts der gewogenen Residuen in äquivalente Integralprobleme zu überführen, fand die Finite-Elemente-Methode Eingang in die Modellierung von Wärmetransport- und Strömungsproblemen. Einen guten Überblick über den Stand der Finite-Elemente-Modellierung hydrodynamischer Probleme findet man in [80], [81], [82]. In der Ozeanographie ist die Modellierung von Küsten- bzw. Binnengewässerströmungen mit Hilfe der Finiten Elemente schon relativ verbreitet (für einen Überblick hierzu s. [52]). Dagegen ist die Nutzbarmachung dieses numerischen Verfahrens für meteorologische Modellierungen bisher auf wenige Fälle beschränkt. Als Beispiel seien das globale Finite-Elemente-Modell von CULLEN [10], die regionalen Prognosemodelle für Nordamerika von STANFORTH und DALEY [66] und die großräumige Grenzschichtmodellierung über dem Gebiet der USA von SHAFFER und LONG [62] genannt.

Mit dem vorliegenden Simulationsmodell hofft der Verfasser, die Vorteile der Finite-Elemente-Methode im Rahmen des hier gestellten Themas zur Geltung bringen zu können.

1. DIE MATHEMATISCHEN GRUNDLAGEN DES MODELLS

1.1 DIE METHODE DER GEWOGENEN RESIDUEN

Hydrodynamische bzw. meteorologische Kontinuumsprobleme werden i.a. als Differentialgleichungsprobleme im Sinne von Randwert- oder Anfangs-Randwertaufgaben formuliert. Die physikalischen Gesetzmäßigkeiten werden hierbei für jeden Punkt des Kontinuums in Gestalt von Differentialgleichungssystemen definiert. Die Anwendung des Konzeptes der *Finiten Elemente* auf Kontinuumsprobleme setzt dagegen eine Formulierung der zugrundeliegenden Gesetzmäßigkeiten in integraler Form voraus.

Diese ergibt sich im günstigsten Falle aus einem physikalischen Extremalprinzip in Gestalt eines Variationsproblems und stellt dann sogar die natürlichste mathematische Formulierung der Kontinuumsphysik dar. Obgleich sich in der Hydrodynamik eine Reihe von Extremalaussagen und daraus ableitbare Variationsprobleme formulieren lassen, ist ihr Vorkommen entweder auf ideale Strömungen oder im Falle reibender Flüssigkeiten auf drehungsfreie Strömungen beschränkt. Einen Überblick über hydrodynamische Variationsprobleme findet man bei FINLAYSON [19], wo auch gezeigt wird, daß sich die NAVIER-STOKESschen Gleichungen nicht als EULER-LAGRANGESche Differentialgleichungen aus einer Extremalaussage herleiten lassen. Damit steht der Variationskalkül für praktisch alle meteorologischen Mesoscale-Modelle nicht zur Verfügung, da diese im wesentlichen auf den NAVIER-STOKESschen Gleichungen bzw. im Fall der flachen Konvektion auf dem System der BOUSSINESQ-Gleichungen beruhen.

Für diese Klasse von Problemen läßt sich jedoch immer ein dem gegebenen Differentialgleichungssystem einschließlich der zugehörigen Anfangs- und Randbedingungen äquivalentes Integralproblem formulieren. Dies wird durch die Existenz vollständiger orthogonaler Funktionensysteme begründet, deren Haupteigenschaft es ist, daß sich jede Funktion des HILBERT-Raumes als Linearkombination aller Funktionen des vollständigen Systems darstellen läßt. Daraus folgt, daß es außer der Nullfunktion keine Funktion gibt, die zu allen Funktionen eines vollständigen Systems orthogonal ist, d.h.

$$\left. \begin{aligned} \int_G \varphi_i(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) dG &= 0 \\ \text{für alle } \varphi_i(\mathbf{r}) \text{ eines auf dem} \\ \text{Gebiet } G \text{ vollständigen ortho-} \\ \text{gonalen Funktionensystems} \end{aligned} \right\} \rightarrow \psi(\mathbf{r}) \equiv 0 \quad (1.1)$$

Dem Differentialgleichungsproblem für eine Funktion $\psi(\mathbf{r})$ mit dem Differentialoperator $\mathcal{D}$

$$\mathcal{D}(\psi(\mathbf{r})) = 0 \quad \text{auf } G \quad (1.2)$$

ist daher die Integralformulierung

$$\int_G \varphi_i(\mathbf{r}) \mathcal{D}(\psi(\mathbf{r})) dG = 0 \quad (1.3)$$

für alle φ_i eines vollständigen
Funktionensystems

äquivalent.

In der exakten Formulierung bezüglich der unendlich vielen Funktionen des vollständigen Systems ist die Integralaufgabe (1.3) nicht lösbar, sie begründet aber die approximative *METHODE DER GEWOGENEN RESIDUEN*. Diese stellt eine unmittelbare Verallgemeinerung des *RITZ*schen Verfahrens zur direkten Lösung von Variationsproblemen dar und sei hier für das Beispiel (1.2) skizziert:

Für die gesuchte Funktion $\psi(\mathbf{r})$ wird eine Approximationsfunktion

$$\hat{\psi} = \hat{\psi}(\mathbf{r}, c_1, \dots, c_N)$$

mit der endlichen Anzahl N von frei verfügbaren Justierungsparametern definiert. Diese Ansatzfunktion wird i.a. die gegebene Differentialgleichung nicht exakt erfüllen, sondern nur bis auf eine Fehlerfunktion (das *Residuum*) ε :

$$\mathcal{D}(\hat{\psi}) = \varepsilon(\mathbf{r}, c_1, \dots, c_N) \neq 0$$

Wegen der nur endlich vielen justierbaren Parameter $c_1, \dots, c_N$ kann das Residuum nur zu N Gliedern eines vollständigen Funktionensystems $\varphi_i(\mathbf{r})$ orthogonalisiert, d.h. nicht zur Nullfunktion gemacht werden. Die Orthogonalisierung zu den N *Basisfunktionen* $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ bedeutet nun nur noch eine Minimierung der Fehlerfunktion in dem Sinn, daß ihre gewichteten Mittel bezüglich jeder der N Funktionen φ_i über dem Gebiet G verschwinden.

Aus den N Forderungen

$$\int_G \varphi_i(\mathbf{r}) \varepsilon(\mathbf{r}, c_1, \dots, c_N) dG = \int_G \varphi_i(\mathbf{r}) \mathcal{D}(\hat{\psi}(\mathbf{r}, c_1, \dots, c_N)) dG = 0 \quad (1.4)$$

$i = 1, \dots, N$

entstehen genau N Bestimmungsgleichungen $F_j(c_1, \dots, c_N) = 0$ ($j = 1, \dots, N$) für die Justierungsparameter $c_1, \dots, c_N$ der Ansatzfunktion.

Je nach Wahl der Gewichtsfunktionen φ_i ergeben sich spezielle Fehlerminimierungen aus der allgemeinen Formulierung (1.4) der

Gewogene - Residuen - Methode, z.B.:

► METHODE DER PUNKTKOLLOKATION

$$\varphi_i(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad \xrightarrow{(1.4)}$$

$$\mathcal{D}(\hat{\psi}(\mathbf{r}, c_1, \dots, c_N)) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i} = 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, N$$

► METHODE DER TEILBEREICHSKOLLOKATION

$$\varphi_i(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & : \mathbf{r} \in G_i \\ 0 & : \mathbf{r} \notin G_i \end{cases} \quad \xrightarrow{(1.4)}$$

$$\int_{G_i} \mathcal{D}(\hat{\psi}(\mathbf{r}, c_1, \dots, c_N)) dG = 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, N$$

► METHODE DER KLEINSTEN QUADRATE

$$\varphi_i(\mathbf{r}) = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial c_i} = \frac{\partial \mathcal{D}(\hat{\psi})}{\partial c_i} \quad \xrightarrow{(1.4)}$$

$$\frac{\partial}{\partial c_i} \int_G [\mathcal{D}(\hat{\psi}(\mathbf{r}, c_1, \dots, c_N))]^2 dG = 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, N$$

DIE GALERKIN - VARIANTE DER GEWOGENE - RESIDUEN - METHODE

Bei der GALERKIN-Variante wird die Approximationsfunktion $\hat{\psi}$ speziell als Linearkombination von N linear unabhängigen Funktionen $\phi_i(\mathbf{r})$ aus einem vollständigen Funktionensystem angesetzt:

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}, c_1, \dots, c_N) = \sum_{i=1}^N c_i \phi_i(\mathbf{r}) \quad (1.5)$$

Es läßt sich zeigen (vgl. z.B. [9]), daß unter allen konkurrierenden N-dimensionalen Funktionsunterräumen gerade der durch die Entwicklungsfunktionen $\phi_i(\mathbf{r})$ in (1.5) aufgespannte Unterraum das für die Fehlerorthogonalisierung optimale Funktionenreservoir darstellt. D.h. mit dem Ansatz (1.5) für die Approximationsfunktion wird die Fehlerminimierung gemäß (1.4) optimal, wenn dort

$$\varphi_i(\mathbf{r}) = \phi_i(\mathbf{r})$$

genommen wird. Das *GALERKIN*-Kriterium zur Residuenminimierung ergibt sich damit als weiterer Spezialfall des Verfahrens (1.4) zu

$$\int_G \phi_j(\mathbf{r}) \mathcal{D} \left(\sum_{i=1}^N c_i \phi_i(\mathbf{r}) \right) dG = 0 \quad (1.6)$$

$j = 1, \dots, N$

Nach Ausführung der Integrationen in (1.6) resultiert ein algebraisches System

$$F_j(c_1, \dots, c_N) = 0 \quad ; \quad j = 1, \dots, N \quad (1.7)$$

zur Bestimmung der Justierungsparameter für die Ansatzfunktion (1.5). Es ist unmittelbar klar, daß sich eine gegebene Nichtlinearität der Differentialgleichung auf das algebraische System (1.7) überträgt.

Die Anwendung des Konzeptes der gewogenen Residuen auf Differentialgleichungssysteme bedarf keiner wesentlichen Verallgemeinerung. Man hat dann nur für jede der gesuchten Funktionen einen zu (1.5) analogen Approximationsansatz mit ggf. jeweils verschiedener Anzahl von freien Parametern einzuführen und jedes der entstehenden Residuen dem Fehlerminimierungskriterium (1.6) zu unterwerfen.

DIE BERÜCKSICHTIGUNG VON RANDBEDINGUNGEN

Um das Prinzip der gewogenen Residuen und speziell dessen *GALERKIN*-Variante möglichst klar darzustellen, wurde bisher nur die Differentialgleichung betrachtet. Zu einem eindeutigen Rand- bzw. Anfangsrandwertproblem gehört jedoch die Vorgabe von Randbedingungen.

Bezogen auf das Beispiel (1.2) einer einzigen Differentialgleichung für eine Funktion ψ lautet das vollständige Differentialgleichungsproblem

$$\mathcal{D}(\psi) = 0 \quad \text{in } G \quad (1.8)$$

$$\mathcal{R}_k(\psi) = 0 \quad \text{auf } \Gamma_k, \quad (1.9)$$

wobei $\mathcal{R}_k(\psi) = 0$ Randbedingungen für die gesuchte Funktion ψ auf Teilstücken Γ_k des Gebietsrandes $\Gamma(G)$ sind. Für die in der Meteorologie relevanten hydro-thermodynamischen Gleichungen sind diese Randbedingungen im wesentlichen von einem der Typen

$$\mathcal{R}_1(\psi) = \psi - \psi_0 = 0 \quad (1.9a)$$

$$\mathcal{R}_2(\psi) = \alpha \mathbf{n} \cdot \nabla \psi - q = 0 \quad (1.9b)$$

$$\mathcal{R}_3(\psi) = \alpha \mathbf{n} \cdot \nabla \psi - \beta \psi - \gamma = 0 \quad (1.9c)$$

bzw. im Fall von Differentialgleichungssystemen für mehrere Funktionen Verallgemeinerungen davon. $\mathbf{n}$ ist der äußere Normalenvektor der Gebietsberandung und α, β, γ, q können Konstanten bzw. Funktionen der unabhängigen Koordinaten sein.

Die *feste Randbedingung* (1.9a) bedeutet die Vorgabe der gesuchten Funktion auf dem Rand und wird durch geeignete Wahl der Ansatzfunktion $\hat{\psi}$ erfüllt.

Die Randbedingungen (1.9b) vom Typ der *Flußrandbedingung* bzw. (1.9c) vom Typ der *Strahlungsrandbedingung* werden in Analogie zu den natürlichen Randbedingungen eines Variationsproblems mit in die Residuenorthogonalisierung einbezogen, wodurch ihre approximative Erfüllung simultan mit der Differentialgleichung gewährleistet wird. Man hat dann anstelle von (1.4) Gleichungen der Form

$$\int_G \varphi_j(\mathbf{r}) \mathcal{D}(\hat{\psi}) dG + \int_{\Gamma(G)} \varphi_j(\mathbf{r}_T) \mathcal{R}(\hat{\psi}) d\Gamma = 0 \quad (1.10)$$

$j = 1, \dots, N$

zur Bestimmung der Justierungsparameter.

Um die höchste Ordnung der in den Gewichtsintegralen auftretenden Ableitungen zu erniedrigen und damit die Stetigkeitsanforderungen an die Ansatzfunktionen abzuschwächen, geht man bei Differentialgleichungen 2. oder höherer Ordnung mit Hilfe partieller Integration zur *schwachen Formulierung* der Gewogene-Residuen-Kriterien über. Durch die Anwendung des GAUSSschen Integralsatzes lassen sich dann in vielen Fällen Randintegrale erzeugen, in deren Integranden gerade die als Randbedingungen vorzugebenden Differentialausdrücke vom Typ $\mathcal{R}_2(\psi)$ oder $\mathcal{R}_3(\psi)$ stehen. In der schwachen Formulierung des Residuumkriteriums bieten sich diese Differentialausdrücke somit zur Festlegung als natürliche Randbedingungen des Differentialgleichungsproblems an. In vielen Anwendungen werden homogene Randbedingungen insbesondere vom Typ (1.9b) formuliert; in diesen Fällen brauchen die entsprechenden Randintegrale nicht einmal ausgewertet zu werden (vgl. Kap. 3.3).

Der Übergang zur schwachen Formulierung wird hier nicht skizziert, weil sie im vorliegenden Konvektionsmodell zur Anwendung kommt und ausführlicher im Kap. 2.4 behandelt wird.

Da in dieser Arbeit ausschließlich die GALERKIN-Variante des Gewogene-Residuen-Kriteriums zur Anwendung kommt, wird im folgenden durchweg der Begriff "GALERKIN-Gleichungen" für die Residuenminimierungsgleichungen vom Typ (1.6) verwendet.

1.2 DAS FINITE - ELEMENTE - KONZEPT

Die wohl einleuchtendste und zugleich allgemeinste Formulierung des Konzepts der finiten Elemente gibt ZIENKIEWICZ [78]:

Ein Finite - Elemente - Prozeß ist ein beliebiger Approximationsprozeß, in dem ein Gesamtsystem "G" durch eine endliche Anzahl von Parametern in Gestalt von Freiheitsgraden ψ_i ($i = 1, \dots, N$) des Systems approximiert wird und bei dem sich die N Bestimmungsgleichungen

$$F_j(\psi_1, \dots, \psi_N) = 0 \quad ; \quad j = 1, \dots, N \quad (1.11)$$

für die Freiheitsgrade durch Addition von Beiträgen aus Elementen G^e , in die das Gesamtsystem G aufgeteilt wird, zusammensetzen lassen, d.h.

$$F_j = \sum_{e=1}^E F_j^e \quad (1.12)$$

F_j^e ist der Elementbeitrag des Elementes G^e zur Bestimmungsgleichung $F_j = 0$. E ist die Anzahl der Elemente.

Die Additivität (1.12) ist nun für alle Approximationen sichergestellt, die als Integrale über das Gesamtgebiet G eines Kontinuumsproblems formuliert werden können, denn für alle integrierbaren Funktionen gilt

$$\int_G (\quad) dG = \sum_{e=1}^E \int_{G^e} (\quad) dG \quad (1.13)$$

mit

$$G = \bigcup_{e=1}^E G^e$$

Damit erfüllen insbesondere alle Approximationen in Gestalt exakter Lösungen von Variationsaufgaben und die nach der Methode der gewogenen Residuen formulierten Approximationen von Differentialgleichungsproblemen das Finite - Elemente - Kriterium (1.12).

Die durch (1.13) begründete Diskretisierbarkeit eines Integralproblems bringt für sich genommen noch keinerlei Vorteile gegenüber den auf das Gesamtgebiet angewendeten Lösungsverfahren. Approximationsfunktionen, die über dem Gesamtgebiet definiert werden, enthalten i.a. sämtliche Freiheitsgrade als Ansatzparameter. Daher ist klar, daß sowohl das klassische Verfahren von RITZ zur direkten Lösung von Variationsaufgaben als auch irgendeine Variante des Gewogenen - Residuen - Verfahrens (1.4) auf algebraische Gleichungssysteme mit voll besetzten Matrizen führen. Selbst im Extremfall der Punktkollokation (1.4a), wo die Gewichtsfunktionen zu Deltafunktionen entarten, bleibt diese Matrixeigenschaft erhalten, denn in jedem der punktwise definierten Residuen sind noch immer alle Ansatzparameter enthalten, solange eine kompakte Ansatzfunktion über dem Gesamtgebiet definiert wird.

Die eigenständige Bedeutung des Finite-Elemente-Konzepts wird erst durch die besondere Definition der Ansatzfunktionen und der Gewichtsfunktionen im Gewogen-Residuen-Kriterium begründet:

► Jede Approximationsfunktion $\hat{\psi}$ über dem Gesamtgebiet G wird stückweise, d.h. *elementweise* so definiert, daß sie über jedem Teilgebiet G^e als Ansatzparameter nur solche Freiheitsgrade enthält, die diesem Element einschließlich seinem Rand angehören. Eine solche Approximationsfunktion läßt sich als Spezialfall des *GALEKIN*-Ansatzes (1.5) schreiben, wobei jetzt als Ansatzparameter anstelle der bisher nicht näher definierten c_i speziell die Werte der gesuchten Funktion(en) an bestimmten Stützstellen ψ_i^e (den *Knotenpunkten*) des Elements auftreten sollen. Sind einem Element G^e n Knotenpunkte zugeordnet, dann lautet diese Ansatzfunktion

$$\hat{\psi}^e(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n N_i^e(\mathbf{r}) \psi_i^e \quad (1.14)$$

worin ψ_i^e die Knotenpunktswerte der Funktion $\psi(\mathbf{r})$ und $N_i^e(\mathbf{r})$ bekannte Ortsfunktionen (die *Basisfunktionen* des Ansatzes) sind. Da für jeden Knotenpunkt $\hat{\psi}(\mathbf{r}_i^e) = \psi_i^e$, beinhaltet der Ansatz (1.14) die notwendige Eigenschaft der Basisfunktionen

$$N_i^e(\mathbf{r}_j^e) = \delta_{ij} \quad (1.15)$$

Die spezielle Form (1.14) des Ansatzes für die Approximationsfunktion kann man durch Einsetzen von $\psi(\mathbf{r}_i^e) = \psi_i^e$ in den allgemeinen Ansatz (1.5) gewinnen, indem mit Hilfe von Matrixinversion nach den c_i als Funktionen der Knotenpunktvariablen ψ_i^e aufgelöst und anschließend geeignet umgeordnet wird. Benutzt man dagegen von vorneherein einen *LAGRANGE*schen Interpolationsansatz, kommt man unmittelbar zu der Form (1.14) für die Approximationsfunktion $\hat{\psi}^e$ (vgl. Kap. 3.4).

Die globale Approximationsfunktion über dem Gesamtgebiet G wird nun definiert als Vereinigung aller stückweise über jedem Element G^e gemäß (1.14) konstruierten lokalen Approximationen:

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \bigcup_{e=1}^E \hat{\psi}^e(\mathbf{r}) \quad (1.16)$$

► Die zur Bildung der *GALEKIN*-Gleichungen für die Knotenpunktvariablen benötigten Gewichtsfunktionen werden mit Hilfe der Basisfunktionen $N_i^e(\mathbf{r})$ des Approximationsansatzes (1.14) definiert. Damit diese neben (1.16) zweite wesentliche Grundlage des Finite-Elemente-Konzepts klar dargestellt werden kann, muß zunächst eine Verabredung über die Nomenklatur getroffen werden: Das Gesamtgebiet G wird in E geeignet durchnummerierte Elemente G^e aufgeteilt. Dadurch, daß jedem Element n Knotenpunkte zugeordnet werden (z.B. die Eck- und Seitenmittelpunkte im Dreieckselement; s. Abb. 1), entfallen auf das Gesamtgebiet G N Knotenpunkte.

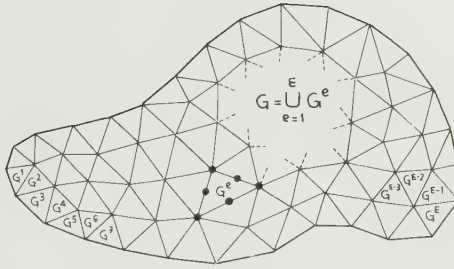


Abb. 1: Einteilung des Gesamtgebietes G in E Elemente G^e

Diese N Knotenpunkte werden nun in zweierlei Weise identifiziert: Einmal werden sie bezüglich des Gesamtgebietes G *global* durchnummeriert, zum anderen werden die zu einem gewissen Element G^e gehörigen Knoten *lokal* indiziert. Dies sei an einem Verbund von Dreieckselementen mit den Eck- und Seitenmittelpunkten als Knotenpunkte demonstriert:

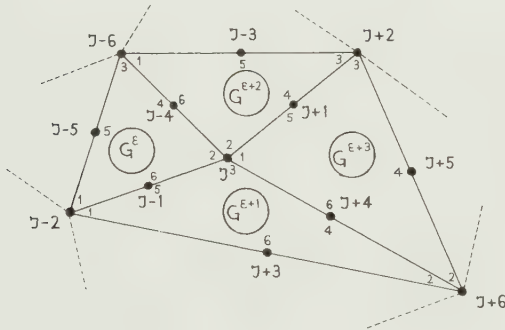


Abb. 2: Globale und lokale Knotennummerierung

Zur globalen Indizierung sollen im folgenden große, zur lokalen Indizierung kleine Buchstaben verwendet werden.

Aus der Abbildung 2 ist klar, daß ein Knoten mit dem globalen Namen J i.a. mehreren Elementen angehört. Bezüglich dieser Elemente wird er dann i.a. verschiedene lokale Namen j haben. Bei der in Abb. 2 gewählten Numerierung kommt es z.B. für die Elemente G^E , G^{E+1} , G^{E+2} zu folgender Identifikation zwischen globaler und lokaler Bezeichnung:

ELEMENT		G^e						G^{e+1}						G^{e+2}					
		1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
LOKALE INDIZIERUNG	i^e	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
Globale INDIZIERUNG	J	J-2	J	J-6	J-4	J-5	J-1	J-2	J+6	J	J+4	J-1	J+3	J-6	J	J+2	J+1	J-3	J-4

Eine Indexnotation $j^e(J)$ soll den lokalen Namen eines Knotenpunktes mit dem globalen Namen J im Element e bezeichnen.

Mit Hilfe der getroffenen Bezeichnungsvereinbarungen lassen sich die gemeinsam mit der speziellen Ansatzform (1.16) das Finite-Elemente-Konzept konstituierenden globalen Gewichtsfunktionen definieren als

$$N_J(\mathbf{r}) = \begin{cases} N_{j^e(J)}^e(\mathbf{r}) & : \quad \mathbf{r}, \mathbf{r}_j \in G^e \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases} \quad (1.17)$$

Hierin sind die $N_{j^e(J)}^e$ gerade die Basisfunktionen des Approximationsansatzes (1.14) für die Funktion ψ über dem Element G^e . (1.17) bedeutet also: Die einem Knotenindex zugeordnete globale Gewichtsfunktion ist nur über dem Verband derjenigen Elemente von Null verschieden, die diesen Knoten gemeinsam enthalten. Im Beispiel der Abb. 2 wäre also die Gewichtsfunktion N_J über dem Gebiet $G^e \cup G^{e+1} \cup G^{e+2} \cup G^{e+3}$, die Gewichtsfunktion N_{J+1} über dem Gebiet $G^{e+2} \cup G^{e+3}$ von Null verschieden. In entfernter Ähnlichkeit zur Methode (1.4b) der Teilbereichskollokation hat man es hier also ebenfalls mit Gewichtsfunktionen zu tun, die nur in einem *kleinen Teil* des Gesamtgebietes von Null verschieden sind.

Die "Stützpfiler" (1.16) und (1.17) der Finite-Elemente-Methode wirken nun in folgender Weise zusammen:

Wegen der *Ausblend-Eigenschaft* (1.17) der Gewichtsfunktionen liefert jedes der GALERKIN-Integrale $\int_G N_J \mathcal{D}(\hat{\psi}) dG$ nur über einem aus wenigen Elementen bestehenden Teilgebiet von G einen von Null verschiedenen Beitrag.

Wegen der speziellen Eigenschaft der Ansatzfunktion (1.16) im Zusammenhang mit (1.14) gehen andererseits über $\mathcal{D}(\hat{\psi})$ in diesen Beitrag nur Knotenpunktvariable ein, die in eben dem kleinen Teilgebiet liegen, das durch die GALERKIN-Wichtung ausgeblendet wird.

Daraus erwachsen gegenüber jedem klassischen Gewogene-Residuen-Verfahren folgende wesentliche Vorteile:

- ▷ In jede GALERKIN-Gleichung gehen nur wenige der dem Gesamtgebiet zugeordneten Knotenvariablen ein. Jedes resultierende algebraische Gleichungssystem für die Gesamtheit der Knoten-

punktvariablen hat also eine schwach besetzte Matrix mit stark ausgeprägter Bandstruktur.

- ▷ Da sowohl die Ansatzfunktionen (1.16) als auch die Gewichtsfunktionen (1.17) über jedem Element nur wenige Freiheitsgrade und damit auch nur wenige Basisfunktionen enthalten, sind die Integranden der *GALERKIN*-Integrale i.a. von analytisch relativ einfacher Gestalt, so daß ihre Quadratur keine wesentlichen Schwierigkeiten bereitet.

DER ELEMENTWEISE AUFBAU DER GLOBALEN *GALERKIN*-GLEICHUNGEN

Um den verwaltungsmäßig kompliziertesten Teil der Finite-Elemente-Prozedur in höchstmöglicher Klarheit darzustellen, soll das einfache Beispiel (1.2) einer Differentialgleichung für eine Funktion ψ benutzt werden. Bei Systemen von Differentialgleichungen für mehrere Funktionen wie im vorliegenden Konvektionsmodell nimmt zwar die Komplexität zu, prinzipiell gilt aber auch hier das folgende.

Die Eigenschaft (1.13) der Additivität von Integralen erlaubt es, die globalen *GALERKIN*-Gleichungen gemäß der Grundvoraussetzung (1.12) eines Finite-Elemente Prozesses in folgender Weise additiv aus Elementbeiträgen zusammenzusetzen :

$$\begin{aligned} F_J(\psi_1, \dots, \psi_N) &= \int_G N_J \mathcal{D}(\hat{\psi}) dG = \sum_{e=1}^E \int_{G^e} N_J^e \mathcal{D}(\hat{\psi}^e) dG \\ &= \sum_{e=1}^E F_J^e = 0 \end{aligned} \quad (1.18)$$

$J = 1, \dots, N$

In der Summenaufspaltung ist dabei die elementweise Zusammensetzung der Ansatzfunktion und der Gewichtsfunktionen gemäß (1.16) bzw. (1.17) berücksichtigt worden. Wegen der auf das jeweilige Element G^e beschränkten *LAGRANGE*-Interpolationseigenschaft (1.14) der Approximationsfunktion $\hat{\psi}^e$ über dem Element, deren Basisfunktionen wiederum die Elementanteile N_J^e der Gewichtsfunktionen N_J bilden, kann jeder Elementbeitrag, d.h. jeder Summand in (1.18), völlig unabhängig allein aus den konstituierenden Bestimmungsstücken des betreffenden Elements (d.h. den Knotenpunktkoordinaten und den Knotenpunktvariablen) aufgebaut werden.

Die oben erläuterte Ausblendeigenschaft der durch (1.17) definierten Gewichtsfunktionen bewirkt, daß in jeder der N *GALERKIN*-Gleichungen (1.18) nur jeweils wenige der Summanden von Null verschieden sind; denn es liefern immer nur die Integrale über solchen Elementen G^e Beiträge, denen der Knotenpunkt mit dem globalen Index J angehört.

Es wäre deshalb offensichtlich ineffektiv, die *GALERKIN*-Gleichungen der Reihe nach für $J=1, \dots, N$ durch Bildung der Summen über jeweils alle Elemente zu bilden, da es hierbei zu einer großen

Zahl redundanter Elementaufrufe und Verwaltung von "Null - Beiträgen" kommen würde.

Dies wird vermieden, wenn als Ordnungsparameter für die Aufstellung des Systems der N GALERKIN - Gleichungen nicht der Gleichungsindex j , sondern der Elementindex e genommen wird. Das bedeutet: Die Elemente G^e werden der Reihe nach für $e=1, \dots, E$ in der Weise abgearbeitet, daß systematisch jeweils sämtliche Beiträge berechnet werden, die das jeweilige Element zu irgendwelchen der N GALERKIN - Gleichungen (1.18) liefert, und zwar zunächst ohne Rücksicht darauf, zu welcher GALERKIN - Gleichung jeder dieser Beiträge gehört.

Mit der oben getroffenen Bezeichnungsübereinkunft bezüglich der globalen und lokalen Indizierung heißt das, daß für jedes gerade bearbeitete Element G^e die n Beiträge

$$\int_{G^e} N_j^e \mathcal{D}(\hat{\psi}^e) dG \quad ; \quad j = 1, \dots, n \quad (1.19)$$

(n : Zahl der Knotenpunktvariablen im Element) berechnet werden. Danach wird die durch die am Beispiel der Abb. 2 demonstrierte Identifikation von lokalem Knotenindex $\hat{j}$ und globalem Knotenindex j gemäß $j = j^e(j)$ vorgenommen. Dadurch wird für jeden der n Elementbeiträge (1.19) die Zugehörigkeit zu einer bestimmten der N GALERKIN - Gleichungen (1.18) festgestellt, so daß er in die Beitragssumme dieser seiner GALERKIN - Gleichung eingewiesen werden kann.

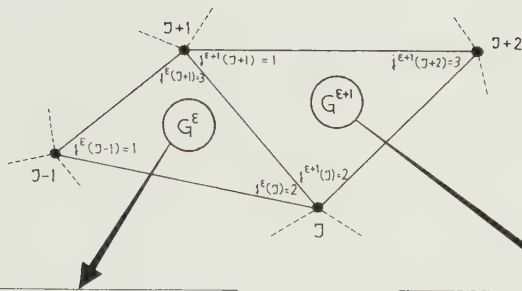
Es ist unmittelbar klar, daß bei dieser Art der Zusammensetzung (*Compilation*) des globalen GALERKIN - Gleichungssystems niemals "Nullbeiträge" berechnet bzw. verwaltet zu werden brauchen, da alle Gewichtsintegrale ausschließlich über denjenigen Definitionsgebietsanteilen der Gewichtsfunktionen durchgeführt werden, auf denen gemäß (1.17) die Gewichte von Null verschieden sind.

Die hier beschriebene Compilation der globalen GALERKIN - Gleichungen aus Elementbeiträgen soll durch die Abbildung 3 noch verdeutlicht werden.

DIE BERÜCKSICHTIGUNG DER RANDBEDINGUNGEN AUF DER ELEMENTEBENE

Die Berücksichtigung von Randbedingungen der verschiedenen Typen in der Finite - Elemente - Approximation ist vorgezeichnet durch die im Kap. 1.1 beschriebene Behandlung von Randbedingungen im Rahmen der Gewogene - Residuen - Methode.

Feste Randbedingungen vom DIRICHLET - Typ (1.9a) bedeuten, daß die betreffenden Variablen an Knotenpunkten auf dem Rand Γ des Gesamtgebietes G keine Freiheitsgrade mehr sind und infolgedessen für sie keine GALERKIN - Gleichungen gebildet werden. Um einen verwaltemäßig möglichst einfachen Algorithmus für die Berechnung der Elementbeiträge und die im vorigen Abschnitt beschriebene Compilationsprozedur zu erhalten, werden in der Praxis die entsprechenden Elementbeiträge i.a. mitberechnet und die zu Variablen auf dem



BEITRÄGE VOM ELEMENT G^ϵ

$$F_{i^\epsilon(J-1)}^\epsilon = \int_{G^\epsilon} N_{i^\epsilon(J-1)}^\epsilon \mathcal{D}(\hat{\psi}^\epsilon) dG$$

$$F_{i^\epsilon(J)}^\epsilon = \int_{G^\epsilon} N_{i^\epsilon(J)}^\epsilon \mathcal{D}(\hat{\psi}^\epsilon) dG$$

$$F_{i^\epsilon(J+1)}^\epsilon = \int_{G^\epsilon} N_{i^\epsilon(J+1)}^\epsilon \mathcal{D}(\hat{\psi}^\epsilon) dG$$

BEITRÄGE VOM ELEMENT $G^{\epsilon+1}$

$$F_{i^{\epsilon+1}(J)}^{\epsilon+1} = \int_{G^{\epsilon+1}} N_{i^{\epsilon+1}(J)}^{\epsilon+1} \mathcal{D}(\hat{\psi}^\epsilon) dG$$

$$F_{i^{\epsilon+1}(J+1)}^{\epsilon+1} = \int_{G^{\epsilon+1}} N_{i^{\epsilon+1}(J+1)}^{\epsilon+1} \mathcal{D}(\hat{\psi}^\epsilon) dG$$

$$F_{i^{\epsilon+1}(J+2)}^{\epsilon+1} = \int_{G^{\epsilon+1}} N_{i^{\epsilon+1}(J+2)}^{\epsilon+1} \mathcal{D}(\hat{\psi}^\epsilon) dG$$

UMINDIZIERUNG LOKAL $\rightarrow$ GLOBAL
 $i^\epsilon(J) \rightarrow J$
 UND EINWEISUNG DER ELEMENTBEITRÄGE
 IN DIE GLOBALE GALERKIN - GLEICHUNGEN

$$\begin{aligned} F_1 &= \sum_{e=1}^E F_1^e = \dots \\ F_{J-1} &= \sum_{e=1}^E F_{J-1}^e = \dots \\ F_J &= \sum_{e=1}^E F_J^e = \dots \\ F_{J+1} &= \sum_{e=1}^E F_{J+1}^e = \dots \\ F_{J+2} &= \sum_{e=1}^E F_{J+2}^e = \dots \\ F_N &= \sum_{e=1}^E F_N^e = \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^E \int_{G^e} N_1^e \mathcal{D}(\hat{\psi}^e) dG &= 0 \\ \sum_{e=1}^E \int_{G^e} N_{J-1}^e \mathcal{D}(\hat{\psi}^e) dG &= 0 \\ \sum_{e=1}^E \int_{G^e} N_J^e \mathcal{D}(\hat{\psi}^e) dG &= 0 \\ \sum_{e=1}^E \int_{G^e} N_{J+1}^e \mathcal{D}(\hat{\psi}^e) dG &= 0 \\ \sum_{e=1}^E \int_{G^e} N_{J+2}^e \mathcal{D}(\hat{\psi}^e) dG &= 0 \\ \sum_{e=1}^E \int_{G^e} N_N^e \mathcal{D}(\hat{\psi}^e) dG &= 0 \end{aligned}$$

Rand gehörigen GALERKIN - Gleichungen erst nach Beendigung der Kompi-
lation durch die festen Randbedingungen ersetzt.

Differentielle Randbedingungen vom NEUMANN - Typ (1.9b) bzw. vom CAUCHY - Typ (1.9c) werden durch Einbezug in die Residuenwichtung gemäß (1.10) erfüllt. Die meisten in der Anwendung auftretenden Randbedingungen vom differentiellen Typ lassen sich durch partielle Integration in den GALERKIN - Gleichungen mit Hilfe des GAUSSschen Integralsatzes als natürliche Randbedingungen formulieren, d.h. sie werden dann von den GALERKIN - Gleichungen selbst zur Spezifikation angeboten.

Es sei z.B. $\mathcal{D}$ ein Differentialoperator 2. Ordnung. Dann läßt sich in den Elementbeiträgen

$$F_i^e = \int_{G^e} N_i^e \mathcal{D}(\hat{\psi}) dG \quad (1.20)$$

die zur Abschwächung der Stetigkeitsanforderungen an die Approximationsfunktion ohnehin erwünschte partielle Integration i.a. so durchführen, daß in der resultierenden *schwachen Formulierung*

$$F_i^e = \int_{G^e} \bar{\mathcal{D}}(N_i^e) \tilde{\mathcal{D}}(\hat{\psi}) dG + \int_{\Gamma^e(G^e)} \mathcal{R}(N_i^e, \hat{\psi}) d\Gamma \quad (1.20)'$$

$\bar{\mathcal{D}}, \tilde{\mathcal{D}}, \mathcal{R}$ Differentialoperatoren 1. Ordnung sind und insbesondere in $\mathcal{R}(N_i^e, \hat{\psi})$ gerade die als Randbedingungen vom NEUMANN - bzw. CAUCHY - Typ vorzugebenden Differentialausdrücke stehen. (Zur konkreten Realisierung s. S 43)

Für die wahre Lösung der Differentialgleichung $\mathcal{D}(\psi) = 0$ würden sich sämtliche Berandungsintegrale $\int_{\Gamma^e} \mathcal{R}(N_i^e, \psi) d\Gamma$ im Inneren von G paarweise gegenseitig aufheben, da wegen der Stetigkeit der Integranden sich die entsprechenden Beiträge jeweils zweier benachbarter Elemente nur durch das Vorzeichen unterscheiden würden. Wird dies auch bezüglich der Approximationsfunktion $\hat{\psi}$ gefordert, dann muß die Stetigkeit von $\mathcal{R}(N_i^e, \hat{\psi})$ über die internen Elementränder hinweg verlangt werden. D.h. bei einer gegebenen Differentialgleichung von n -ter Ordnung muß die Ansatzfunktion $\hat{\psi}$ einschließlich ihrer $(n-1)$ ten Ableitung stetig sein. Elemente, deren stückweise Ansatzfunktionen diese Stetigkeitsanforderung an $\hat{\psi} = \bigcup_{e=1} \hat{\psi}^e$ erfüllen, heißen *konform*.

In der Praxis ist es auf der Basis der elementweisen LAGRANGESchen Interpolation (1.14) sehr leicht, die Stetigkeit von $\hat{\psi}$ selbst auf den Elementrändern zu gewährleisten.

Wesentlich aufwendiger ist es dagegen, z.B. mit Hilfe der HERMITE - Interpolation Approximationsfunktionen jeder höheren als der nullten Stetigkeitsordnung zu erzeugen. Deshalb wird in der praktischen Anwendung meist mit nichtkonformen Elementen gearbeitet, wobei dann Elementbeiträge auf den internen Elementrändern in Kauf genommen werden, die sich wegen des approximationsbedingten Stetigkeitsdefekts

nicht vollständig kompensieren.

Die Zulässigkeit nichtkonformer Approximationen muß im Einzelfall für jeden entsprechenden Elementtyp nachgewiesen werden; notwendige Voraussetzung ist aber in jedem Fall, daß die *Fehlerbeiträge* auf den Elementrändern im Grenzwert gegen Null strebender Elementabmessungen verschwinden (s. hierzu ZIENKIEWICZ [79], wo auf Untersuchungen über nichtkonforme Elemente weiterverwiesen wird).

1.3 DIE VORZÜGE DER FINITE - ELEMENTE - METHODE

Die vorangegangene Darstellung des Finite-Elemente-Konzepts gestattet es zwanglos, schon vor der Präsentation eigener Ergebnisse für die verstärkte Verwendung dieser Approximationsmethode zur numerischen Simulation mesometeorologischer Phänomene zu werben. Die aktuellen Mesoscale-Modelle basieren fast ausnahmslos auf Differenzenapproximationen der zugrundeliegenden partiellen Differentialgleichungen (z.B. [50], [1], [68], [76], [11]). Dabei kommen die Vorteile der Finite-Elemente-Approximation gerade in diesem meteorologischen Anwendungsgebiet optimal zur Geltung.

Gemeinsame Grundlage des Differenzen- und Finite-Elemente-Verfahrens ist die Diskretisierung eines Kontinuumsproblems. Die Finite-Elemente-Diskretisierung ist jedoch insofern kontinuumsgerechter, als hierbei sowohl die Approximationsfunktionen als auch die Differentialgleichungsapproximationen gebietsweise kontinuierlich über jedem Punkt des Gesamtgebietes definiert werden. Demgegenüber wird ein Kontinuum bei der Differenzenapproximation nur durch eine endliche Anzahl von diskreten Punkten repräsentiert und ausschließlich an diesen Gitterpunkten werden die Differentialgleichungen und ihre Lösungen definiert. Wesentliche numerische Probleme der auf lokaler TAYLOR-Entwicklung beruhenden Differenzenverfahren resultieren aus der Notwendigkeit, *Ableitungen* durch endliche Differenzen zu approximieren. Bei dem auf kontinuierlicher Fehlerorthogonalisierung beruhenden Finite-Elemente-Verfahren können wie bei der Spektralmethode alle Ableitungen analytisch gebildet werden und es ist hier die *Integration*, die approximativ durchgeführt werden muß, wodurch u.a. eine zwanglose Berücksichtigung von Unstetigkeiten im Kontinuum möglich ist.

Viel augenfälliger sind jedoch die Vorzüge der Finite-Elemente-Methode im Hinblick auf *irreguläre Modellgeometrie* und *Inhomogenitäten* sowohl der Randbedingungen als auch der Quell- und Lösungsfunktionen, die allesamt charakteristische Merkmale meteorologischer Mesoscale-Modelle sind.

Die Berücksichtigung einer irregulären Topographie gestaltet sich im Rahmen der Differenzenmethode grundsätzlich mehr oder weniger schwerfällig. Versucht man z.B., ein rechtwinkliges reguläres Gitter der Topographie anzupassen, so werden die Gitterpunkte i.a. nicht auf dem Rechengebietsrand liegen. Zur Erfüllung der Randbedingungen müssen dann in unmittelbarer Randnähe mit Hilfe irregulärer Hilfspunkte anisotrope Differenzenoperatoren eingeführt werden, deren Abbruchfehler von kleinerer Ordnung im Gitterinkrement

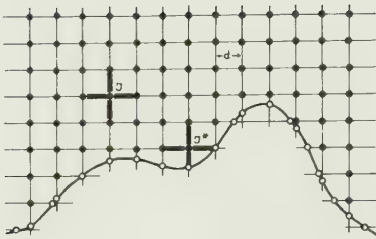


Abb. 4 : Anpassung eines regulären Gitters an eine Topographie

- reguläre Gitterpunkte
- irreguläre Hilfspunkte

Das gängigere Verfahren der Gitteranpassung mit Hilfe topographiebedingter Koordinatentransformationen (z.B. [39]) wird bei irregulärer Topographie unhandlich,

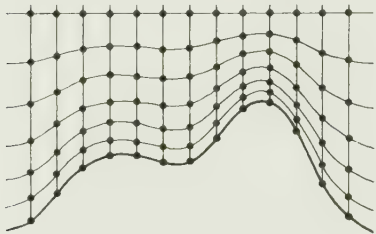


Abb. 5 : Anpassung eines Gitters durch topographieangepasste Koordinatentransformation

$$\{x, z\} \rightarrow \{x, \eta(x, z)\}$$

Demgegenüber läßt sich eine Finite-Elemente-Diskretisierung ohne jede Approximationskomplikation unabhängig vom gewählten Koordinatensystem auch an sehr komplexe Topographien anpassen. Fast ideal anpassungsfähig ist die Diskretisierung mit Hilfe von Dreieckselementen bzw. schiefwinkligen Viereckselementen, selbst wenn diese geradlinig sind (s. Abb. 6).

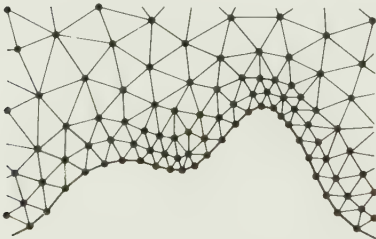


Abb. 6 : Topographieangepasste Finite-Elemente-Diskretisierung

ist als derjenige im Innengitter [57], [12]. (vgl. in Abb. 4 das isotrope Differenzenkreuz am Gitterpunkt J mit dem topographiebedingt anisotropen Gitterkreuz am Punkt J*; bei ersterem ist der Abbruchfehler von der Ordnung $O(d^2)$, beim zweiten dagegen von der Ordnung $O(d)$!).

Überdies ist unmittelbar klar, daß sich für angepaßte reguläre Gitter programmtechnisch schwerfällige Algorithmen ergeben.

da entweder gar keine oder höchstens stückweise analytische Transformationsbeziehungen aufgestellt werden können. Beschränkt man sich nicht auf sehr geringe Höhengradienten (Hangneigungen), entfällt zudem die Möglichkeit der approximativen Orthogonalisierung des topographieangepassten Koordinatensystems und der dann erhebliche Metrikballast in den Differentialgleichungen führt i.a. zu unübersichtlichen und aufwendigen Differenzialalgorithmen.

Darüber hinaus bedeutet aber auch die Verwendung krummliniger Elemente (isoparametrische Elemente, s. hierzu [59]) nur einen etwas größeren numerischen Aufwand, jedoch keine prinzipiellen Schwierigkeiten. Es ist klar, daß auch eine stufenlose Anpassung der Auf-

lösung an unterschiedliche Variabilität der Lösungsfelder im Innengebiet (z.B. im Grenzschichtbereich) bzw. der Randbedingungen (z.B. im Bereich lokaler Wärmequellen) im Gegensatz zur Differenzenmethode völlig problemlos ist.

Weiter begünstigt die kontinuierliche Auflösung durch finite Elemente eine Berücksichtigung koordinatenabhängiger Parameter in den Differentialgleichungen, da deren Variabilität elementweise entweder in gegebener analytischer Form oder, falls sie z.B. nur an diskreten Meßpunkten vorgegeben sind, mit Hilfe der Basisfunktionen elementweise kontinuierlich über dem gesamten Gebiet berücksichtigt werden können. Die dann komplexere Gestalt der *GALERKIN*-Integrale fällt im Rahmen einer numerischen Quadratur kaum ins Gewicht.

Schließlich zählt zugunsten der Finite-Elemente-Methode die in Kap. 1.2 beschriebene zwanglose Einarbeitung aller Randbedingungen. Dabei tritt die Überlegenheit insbesondere im Fall der differentiellen Randbedingungen vom *NEUMANN*- bzw. *CAUCHY*-Typ auf irregulären Berandungen zutage.

Alle genannten Vorteile haben insofern ihren Preis, als die Finite-Elemente-Diskretisierung eines Differentialgleichungsproblems ungleich mehr mathematische Vorarbeit als die Differenzenapproximation erfordert. Wegen der aufwendigeren numerischen Hilfsalgorithmen (z.B. numerische Quadratur) und Steuerprozeduren (insbesondere bei der Kompilation der Elementbeiträge) ergeben sich für Diskretisierungen mit vergleichbar vielen Gitter- bzw. Knotenpunkten i.a. größere Rechenzeiten mit der Finite-Elemente-Methode. Das wird aber z.T. dadurch wieder kompensiert, daß man im Vergleich zur Gitterpunktdiskretisierung zur Erzielung vergleichbar genauer Ergebnisse bezüglich der Anzahl der Knotenpunkte bzw. Gitterpunkte mit einer oft wesentlich gröberen Finite-Elemente-Diskretisierung auskommt.

2. DAS MODELLGLEICHUNGSSYSTEM

2.1 DIE PHYSIKALISCHEN MODELLAPPROXIMATIONEN

In dieser Arbeit wird die Finite-Elemente-Simulation stationärer erzwungener, freier sowie gemischter Konvektion im Bereich eines zweidimensionalen Berges bzw. Tales mit großen Hangneigungen vorgestellt. Die Integrationsgebiete in der x, z -Ebene haben dabei Abmessungen von 10 bzw. 8 km in der Horizontalen und 2 km in der Vertikalen. Senkrecht zur Integrationsebene werden die Topographien als unendlich ausgedehnt angenommen. Damit kann im Rahmen der vorausgesetzten geometrischen, kinematischen und dynamischen Homogenität in y -Richtung die Abhängigkeit der lokalen Dynamik von der Richtung der treibenden Druckbeschleunigung untersucht werden. Gemäß der von WIPPERMANN [74] für Betrachtungen über mögliche Modellapproximationen zugrundegelegten Scale-Unterteilung sind beide Modellversionen im y -Mesoscale angesiedelt.

Teilweise gestützt durch scale-analytische Abschätzungen (z.B. DUTTON, FICHTL [14]) sowie vergleichende Experimente und auf Grund von Beobachtungen lassen sich folgende Modellapproximationen als begründet ansehen.

► *CORIOLIS*-Effekte sind für die mesoskalige Dynamik bedeutungslos. Die Berücksichtigung der *CORIOLIS*-Beschleunigung in diesem Scale wird nur im Hinblick auf die einbettende bzw. aufgeprägte Grundströmung erforderlich. Beispiele hierfür bieten TAYLOR [69], wo die *CORIOLIS*-Beschleunigung zur Konstituierung der Einströmrandbedingung in Gestalt einer *EKMAN*-Gleichgewichtsströmung benötigt wird, und MASON, SYKES [42], wo die geforderte Zyklizität der Randbedingungen am Ein- und Ausströmrand eine horizontalhomogene Grenzschicht der Grundströmung voraussetzt. Diese Bedingung wird wiederum von einer *EKMAN*-Gleichgewichtsströmung erfüllt. Auf den ersten Blick legt eine solche Begründung für die Berücksichtigung der *CORIOLIS*-Beschleunigung den Kompromiß nahe, ihre Beteiligung auf das Beschleunigungsgleichgewicht der ungestörten Anströmung zu beschränken. D.h., die *CORIOLIS*-Beschleunigung würde dann zwar im eindimensionalen Modell zur Berechnung der Einströmrandbedingung berücksichtigt, nicht jedoch im eigentlichen mesoskaligen Simulationsmodell. Dies scheitert jedoch an der Forderung, die seitlichen Ränder des Integrationsgebietes in möglichst große Entfernung von den dynamischen und thermischen Störungsquellen zu legen. Wie durch Beschleunigungsanalysen im Rahmen dieser Arbeit (vgl. Kapitel 5.4) bestätigt wird, werden aber in größerem Abstand von den Störungszentren die Trägheits- und Störbeschleunigungen so klein, daß dort die Strömung weitgehend - wie die Außenströmung - vom *EKMAN*-Gleichgewicht beherrscht wird. Das gilt insbesondere für die unmittelbare Umgebung des Einströmrandes. Trotz ihres vernachlässigbar geringen Einflusses auf die durch geometrische, dynamische und thermische Störungsquellen im Mesoscale bedingten lokalen Strömungserscheinungen muß daher die *CORIOLIS*-Beschleunigung zur Sicherstellung eines kompatiblen Überganges zwischen Außen- und Innenströmung auch im Inneren des Integrationsgebietes berücksichtigt werden.

Auch im vorliegenden Modell wird zur Berechnung der Einströmrandbedingung eine an das *EKMAN*-Beschleunigungsgleichgewicht adaptierte Anströmung vorausgesetzt. Deshalb wird der dieses Gleichgewicht konstituierende Anteil $-f\mathbf{k} \times \mathbf{v}_h$ der vollständigen *CORIOLIS*-Beschleunigung $-2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ in der Horizontalkomponente der Bewegungsgleichung beibehalten.

► Für flache Konvektion sind *Dichtevariationen* mit einer Ausnahme dynamisch bedeutungslos. Die Ausnahme besteht im Zusammenwirken lokaler Dichteschwankungen mit der Schwerkbeschleunigung in Gestalt der Auftriebsbeschleunigung. Diese Annahme bildet zusammen mit der Voraussetzung, daß lokale Dichtevariationen in erster Linie durch lokale thermische Inhomogenitäten entstehen, den wesentlichen Gehalt der *BOUSSINESQ*-Approximation, die auch im vorliegenden Modell verwendet wird. Unter Berufung auf die Abschätzungen von DUTTON, FICHTL [14] begründet z.B. PIELKE [50] diese Approximation sogar in einem Modell für Konvektion mit einer vertikalen Erstreckung von 5 km. Doch ist fraglich, ob in einem solchen Vertikalscale noch auf die Berücksichtigung der Höhenabhängigkeit der Dichte im Grundzustand verzichtet werden kann und nicht stattdessen die *BOUSSINESQ*-Form der Kontinuitätsgleichung $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ durch die anelastische Approximation $\nabla \cdot \rho_0(z)\mathbf{v} = 0$ ersetzt werden muß.

► Grundsätzlich verschiedene Beschreibungen der mesoskaligen Modellphysik und insbesondere aus der jeweiligen Interpretation des Druckes resultierende Eigentümlichkeiten der Lösungsprozedur ergeben sich je nach Verwendung oder Nichtverwendung der *hydrostatischen Approximation*. Nach der Scale-Analyse in [74] ist es bei einem Längenscale von 10 km gerade noch zulässig, anzunehmen, daß die durch lokale Druckabweichungen vom statischen Grundzustand erzeugten vertikalen Druckbeschleunigungen vollständig von der Auftriebsbeschleunigung kompensiert werden. Für erzwungene Konvektion über sehr steilen Bergen bzw. für thermische Hangzirkulationen bei realistischen Temperaturinhomogenitäten als Folge steiler Hangneigungen ist eine Vernachlässigung der Trägheitsbeschleunigungen gegenüber Druck- und Auftriebsbeschleunigung jedoch a priori zu verwerfen; denn die meisten der für solche Bedingungen charakteristischen Strömungserscheinungen sind nichthydrostatischer Natur.

So verdanken z.B. die Grenzschichtablösung im Lee bzw. die verwandte Stauwirbelbildung im Luv eines steilen Berges ihre Existenz dem nichthydrostatischen Anteil des Stördruckfeldes und ebenso sind die Leewellen eine Folge der Abweichung vom hydrostatischen Beschleunigungsgleichgewicht in einer stabil geschichteten Strömung. Die Signifikanz nichthydrostatischer Effekte wird anhand der Ergebnisse des vorliegenden *nichthydrostatischen* Modells in Kapitel 5.4 nachgewiesen. Dort werden für ausgewählte Fälle alle die Vertikalkomponente der Bewegungsgleichung bildenden Beschleunigungen berechnet und feldmäßig dargestellt. Zur Rechtfertigung der hier ohne quantitative Abschätzungen postulierten Notwendigkeit einer nichthydrostatischen Modellierung sei der Ergebnisdiskussion vorweggenommen, daß insbesondere die Trägheitsbeschleunigungen in Hangnähe dieselbe Größe erreichen wie die Stördruck- und Auftriebsbeschleunigung.

Wegen des Fehlens einer Theorie für turbulente Strömungen über unebenem Gelände besteht die größte Unsicherheit bei der Formulierung mesoskaliger Modellphysik in der Parameterisierung der Turbulenz. Dieses Problem stellt sich sowohl bei der Verwendung von Gradientensätzen als auch bei der Hinzunahme der REYNOLDSSchen Gleichungen für die turbulenten Flüsse. Im ersten Fall betreffen die Schließungshypothesen die turbulente Viskosität (ggf. über den Mischungsweg oder die turbulente kinetische Energie) bzw. die turbulente Wärmeleitfähigkeit. Im Rahmen der "Schließung zweiter Ordnung" müssen Schließungsannahmen für die in den REYNOLDSSchen Gleichungen auftretenden höheren Korrelationen von Schwankungsgrößen gemacht werden, um diese auf die turbulenten Flüsse bzw. auf die Variablen des ausgeglichenen Zustandes zurückzuführen. Das zuletzt genannte Schließungskonzept erzwingt die Erweiterung des Modellgleichungssystems im dreidimensionalen Fall um 6+3 und im zweidimensionalen Fall um 3+2 Gleichungen für die Komponenten des turbulenten Reibungstensors und des turbulenten Wärmeflusses. Der damit verbundene numerische Mehraufwand läßt sich auch für den Fall plausibler Schließungsansätze nur für Modellierungen solcher kleinräumigen Phänomene rechtfertigen, die in erster Linie durch die Struktur der Turbulenz bestimmt werden. Deshalb kommen in der Praxis der numerischen Simulation mesoskaliger Strömungen fast ausschließlich die Parameterisierungen über die turbulente Viskosität zur Anwendung. Dabei sind diejenigen Ansätze favorisiert, die entweder auf Mischungsweghypothesen (vorzugsweise BLACKADAR [4]) basieren (z.B. in [76]) oder bei denen nach O'BRIEN [44] für die bodennahe Grenzschicht eine aus der PRANDTL- bzw. MONIN- OBUKHOV- Theorie abgeleitete Höhenabhängigkeit der turbulenten Austauschkoeffizienten postuliert und für die EKMAN-Schicht eine HERMITE- Interpolation für $K(z)$ in Gestalt eines kubischen Polynoms gemacht wird (so z.B. bei MAHRER, PIELKE [39], [75], BEHNKE [3], BUCHHOLD [5]).

Im Rahmen beider Schließungskonzepte werden die Schließungsannahmen im wesentlichen aus der Theorie der Turbulenz für stationäre und horizontalhomogene Verhältnisse abgeleitet. Gerade im Fall der Überströmung sehr steiler Berge bzw. Täler mit ggf. starken horizontalen Temperaturinhomogenitäten sind sowohl aus kinematischen Gründen als auch wegen solcher Phänomene wie z.B. Grenzschichtablösung in Lee- und Luv-Rotoren diese Voraussetzungen nicht mehr gegeben. So werden spätestens im Lee der Grenzschichtablösung alle Parameterisierungsannahmen für die bodennahe Schicht gegenstandslos. Die Übernahme der in Mesoscale-Modellen mit schwachen Topographie- neigungen (oft sehr viel kleiner als 1:10) erprobten oben zitierten Parameterisierungsansätze in Modelle mit starken Geländeneigungen ist daher von vornherein nicht mehr begründbar, sondern allenfalls durch empirische Verifikation zu rechtfertigen.

Einige Autoren (z.B. WEN TANG [67], FURUKAWA [22], THYER [70], LYKOSOV, GUTMAN [38]) sind kompromißlos sogar noch weiter gegangen und haben zumindest teilweise mit konstanten turbulenten Viskositäten gerechnet, wobei verschiedentlich sehr hohe Werte für K genommen wurden (bei WEN TANG und THYER jeweils $K_M = 10 \text{ m}^2/\text{sec}$, bei FURUKAWA jedoch $K_M = 100 \text{ m}^2/\text{sec}$). In diesem Zusammenhang sei auf ein erstaunliches Ergebnis von PATRINOS, KISTLER [49] hingewiesen:

Unter bezüglich der Turbulenzparameterisierung konkurrierenden Simulationen der Land-Seewind-Zirkulation am Michigan-See vor Chicago zeigte gerade diejenige mit konstanter Viskosität die realistischsten Ergebnisse.

In der vorliegenden Arbeit wird die Hypothese zugrundegelegt, daß im Falle steiler und irregulärer Topographie mit den dadurch bedingten starken Temperaturinhomogenitäten die charakteristischen Formen mesoskaliger Strömungen (Leewellen, Grenzschicht- und Leewellenablösung, Strömungsblockierung, anabatische und katabatische Windsysteme, Strömungskanalisation) im wesentlichen durch die Berandungsgeometrie und geordnete Konvektionsbewegungen, nicht aber in erster Linie durch die Turbulenzstruktur bestimmt werden. Auf der Basis dieser Hypothese wird im vorliegenden Modell versucht, bei der K-Parameterisierung diejenigen Ansätze zu übernehmen, die eigentlich nur für ebenes, allenfalls flach geneigtes und überdies physikalisch horizontalhomogenes Gelände begründet werden können. D.h., es wird die von *BOUSSINESQ* postulierte Proportionalität zwischen turbulentem Spannungstensor und dem Deformationstensor des ausgeglichenen Windfeldes zugrundegelegt. Dabei entartet der diese lineare Abbildung vermittelnde Tensor 4. Stufe unter Annahme der Isotropie zur skalaren turbulenten Viskosität (s. hierzu z.B. *HINZE* [26], *FIEDLER* [18]). Für die turbulente Viskosität wird dann in üblicher Weise eine explizite Höhenabhängigkeit bzw. über die Rückführung auf die gemittelten Wind- und Temperaturfelder eine implizite Ortsabhängigkeit gefordert (s.u. S 25).

Mit der Übernahme der halbempirischen bzw. empirischen Parameterisierungsansätze taucht als weiteres Problem die im Vergleich zu den Längenscales der bodennahen Grenzschicht (Rauigkeitshöhe bzw. *MONIN - OBUKHOV*-Länge) unzureichende Auflösung der verwendeten Diskretisierung des Integrationsgebietes auf. Allein die empfindliche Abhängigkeit der Ablenkung des bodennahen Windes gegenüber der aufgeprägten Druckbeschleunigung von der Bodenrauigkeit würde eine Auflösung der Diskretisierung in Bodennähe mindestens von der Größenordnung der Rauigkeitslänge erforderlich machen. Der notwendige Verzicht auf eine solche Feinauflösung in einem Mesoscale-Modell erzwingt eine Modifikation der diskretisierten Differentialgleichungen in Bodennähe durch explizite oder implizite Einarbeitung der Profilgesetze für die bodennahe Grenzschicht (s. hierzu [16], [76] und besonders die Ausführungen von *PIELKE*, *MAHRER* in [51]).

Um die ohnehin fragwürdige Übernahme der für die horizontalhomogene Grenzschicht gültigen Parameterisierungsansätze nicht überzustrapazieren, wird in dieser Arbeit mit konstantem Verhältnis K_M/K_H gerechnet. Schließlich wird die Energiedissipation als unmaßgeblich für Konvektionsbewegungen über steiler Topographie angenommen und daher vernachlässigt.

2.2 DAS DIFFERENTIALGLEICHUNGSSYSTEM

Zur Beschreibung des *BOUSSINESQ*-Kontinuums werden der dreidimensionale Windvektor $\mathbf{w} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ und die Abweichungen p, ϑ, ϱ der Variablen p_{GESAMT} (Druck), θ_{GESAMT} (potentielle Temperatur), ϱ_{GESAMT} (Dichte) von einem hydrostatischen Referenzzustand benutzt. Werden die Variablen des hydrostatischen Grundzustandes durch den Index '0' gekennzeichnet, dann sind die Abweichungen p, ϑ, ϱ definiert durch

$$p_{\text{GESAMT}} = p_0(x, y, z) + p(x, z) \quad (2.1a)$$

$$\theta_{\text{GESAMT}} = \theta_0(z) + \vartheta(x, z) \quad (2.1b)$$

$$\varrho_{\text{GESAMT}} = \varrho_0 + \varrho(x, z) \quad (2.1c)$$

wobei in (2.1c) bereits die *BOUSSINESQ*-Approximation bezüglich des Referenzzustandes berücksichtigt ist. Als einzige Ausnahme von der vorausgesetzten Homogenität in der Normalenrichtung zur Integrations-ebene muß zur Konstituierung der treibenden Druckkraft in (2.1a) $p_0 = p_0(x, y, z)$ zugelassen werden. Die lokale Dichtevariation kann aus dem System der Modellvariablen mit Hilfe der *BOUSSINESQ*-Zustandsgleichung

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = -\frac{\vartheta}{\theta_0} \quad (2.2)$$

eliminiert werden. (2.2) ist im wesentlichen eine Folge der vorausgesetzten "*BOUSSINESQ*-Inkompressibilität", nach der lokale Dichtevariationen nur als Folge von Temperaturstörungen zugelassen werden.

Unter Berücksichtigung des hydrostatischen Gleichgewichts im Grundzustand $-g\mathbf{k} - \frac{1}{\varrho_0}\nabla p_0 = 0$ sowie der Zustandsgleichung (2.2) lautet das stationäre Modellgleichungssystem mit den im vorigen Abschnitt vereinbarten Voraussetzungen:

$$\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w} + \mathbf{f} \mathbf{k} \times \mathbf{v}_h = -\frac{1}{\varrho_0} \nabla p + g \frac{\vartheta}{\theta_0} \mathbf{k} + \nabla \cdot [K_H (\nabla \mathbf{w} + \mathbf{w} \nabla)] + \mathbf{f} \mathbf{k} \times \mathbf{v}_{h,g} \quad (2.3a)$$

$$\mathbf{w} \cdot \nabla \vartheta + (\gamma_i - \gamma_g) w = \nabla \cdot (K_H \nabla \vartheta) \quad (2.3b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = 0 \quad (2.3c)$$

Wegen der mit Ausnahme von p_0 vorausgesetzten Homogenität in y -Richtung reduziert sich der Nablaoperator auf $\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$. In der Bewegungsgleichung (2.3a) ist unter Verwendung der Definition des

geostrophischen Windvektors die treibende massenspezifische Druckkraft geschrieben worden als $-\frac{1}{\rho_0} \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} \right) p_0 = f k \times w_{h,g}$. In der thermischen Energiegleichung (2.3b) ist $\gamma_i = g/c_p$ der individuelle trockenadiabatische 'Temperaturgradient' und $\gamma_g = -\frac{\partial T_0}{\partial z}$ der geometrische vertikale 'Temperaturgradient' im hydrostatischen Grundzustand. K_M ist die turbulente Viskosität und K_H die turbulente Wärmeleitfähigkeit.

DIE SCHLIESSUNGSANNAHMEN FÜR DIE TURBULENTE VISKOSITÄT

Bezüglich aller in diesem Abschnitt nicht explizit erläuterten Bezeichnungen sei auf die Symbolliste verwiesen.

Unter den bei der Begründung der Modellapproximationen dargelegten Vorbehalten wird für die turbulente Viskosität im Falle *erzwungener Konvektion* der PRANDTLsche Mischungswegansatz

$$K_M = l^2 \left| \frac{\partial w_h}{\partial z} \right| \quad (2.4)$$

mit
$$l = \frac{l_{ad}}{\phi_M} \quad (2.5)$$

genommen. Für den adiabatischen Mischungsweg wird der Ansatz von BLACKADAR [4] gewählt:

$$l_{ad} = \frac{k (z_R + z_0)}{1 + \frac{k (z_R + z_0)}{\lambda}} \quad (2.6)$$

Vom selben Autor stammt der hier verwendete Ansatz

$$\lambda = 0.00027 \frac{|w_{h,g}|}{f}$$

für den asymptotischen Mischungsweg $\lambda = l_{ad}(z \rightarrow \infty)$. z_R ist hier die relative Höhe bezogen auf die Topographiefläche $z_{top} = h(x)$, d.h. $z_R = z - h(x)$. Für die Stabilitätsfunktion ϕ_M steht ein reichhaltiges Angebot von empirischen Ansätzen zur Verfügung (vgl. z.B. die tabellarische Übersicht in [6]). Hier werden die auf den Daten von BUSINGER et al. [7] basierenden Regressionsfunktionen

$$\phi_M = \begin{cases} 1 + 4.7 \text{Rif} & : \text{Rif} > 0 \\ (1 - 15 \text{Rif})^{-\frac{1}{4}} & : \text{Rif} < 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

benutzt. Die turbulenten Flüsse von Impuls und Wärme bzw. stellvertretend u_* und θ_* werden im vorliegenden Modell nicht explizit berechnet. Stattdessen wird in Anlehnung an [76] gegenüber [39] von der für schwach diabatische Schichtungen gültigen Approximation $\frac{z}{L} \approx \text{Rif}$ ($L = -u_*^3 / (k \frac{g}{\theta_0} \frac{H_*}{c_p \theta_0}) = \frac{\theta_0 u_*^2}{k g \theta_*}$: MONIN - OBUKHOV'scher Längenscale) Gebrauch gemacht. Für die RICHARDSON - Flußzahl Rif bzw. die RICHARDSON - Zahl Ri gilt

$$\text{Rif} = \frac{K_M}{K_M} \text{Ri} \quad (= \frac{\text{Ri}}{\text{Pr}}) \quad (2.8)$$

$$\text{Ri} = \frac{\frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \theta}{\partial z}}{\left| \frac{\partial v_h}{\partial z} \right|^2} \quad (2.9)$$

Bei der Auswertung von Ri wird für den Windscherungsbetrag ein sehr kleiner Wert als untere Schranke vorgegeben ($\left| \frac{\partial v_h}{\partial z} \right| \geq 10^{-3} \text{ sec}^{-1}$).

Das Verfahren zur impliziten Berücksichtigung der Profilgleichungen für die von der Elementdiskretisierung nicht aufgelöste bodennahe Grenzschicht kann an dieser Stelle noch nicht beschrieben werden, da die Elemententeilung und Knotenpunktbelegung des Integrationsgebietes erst in Kap. 3.2 eingeführt wird. Da es auf die Art der Diskretisierung dabei jedoch nicht wesentlich ankommt, kann diese auf eine Modifizierung des K_M -Feldes in Bodennähe hinauslaufende Profilkorrektur schon vorher anhand des eindimensionalen Differenzenmodells für die Berechnung der Einströmrandbedingungen skizziert werden (s. S 34).

Für die numerischen Experimente zur *freien Konvektion* wird bis zu einer vorgegebenen Höhe h_p (hier: $h_p = 50 \text{ m}$) über Grund der von PRIESTLEY [55] stammende Parameterisierungsansatz

$$K_M = \alpha z_R^2 \sqrt{\frac{g}{\theta_0} \left| \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|} \quad (2.10)$$

mit $\alpha = 0.9$ und wiederum $z_R = z - h(x)$ genommen. Für $z_R > h_p$ wird eine lineare Interpolation zwischen $K_M(z_R = h_p)$ und einer vorgeschriebenen unteren Schranke $K_M(z = H)$ definiert. Hier wird H mit der Modellobergrenze gleichgesetzt und $K_M(z = H) = 0.5 \text{ m}^2/\text{sec}$ genommen.

DAS DIMENSIONSLOSE MODELLGLEICHUNGSSYSTEM

Sowohl zur Nutzbarmachung der Ähnlichkeitstheorie zwecks einer Reduktion der unabhängig voneinander zu variierenden Modellparameter als auch zur Ermöglichung einer modellunabhängigen normierten Datenein- und -ausgabe wird zu einer dimensionslosen Form von (2.3a-c) übergegangen.

Da nicht unbedingt für jede Anwendung eine charakteristische Länge im Modell existiert, werden die Koordinaten x und z mit den horizontalen bzw. vertikalen Abmessungen L und H des Integrationsgebietes skaliert. Mit Hilfe charakteristischer Geschwindigkeiten U und W , einer charakteristischen potentiellen Temperatur Θ_0 , der Dichte ρ_0 und dem individuellen trockenadiabatischen Temperaturgradienten γ_i werden die unabhängigen und abhängigen Variablen in folgender Weise dimensionslos gemacht (die dimensionslosen Variablen werden vorübergehend durch einen Strich markiert) :

$$\begin{aligned}x &= L x' \\z &= H z' \\u &= U u' \\v &= U v' \\w &= W w' \\p &= P_D p' = \rho_0 U^2 p' \\ \gamma &= \Delta T \gamma' = \gamma_i H \gamma' \\ \Theta &= \Theta_0 \Theta' \\ K_M &= K_M K'_M \\ K_H &= K_H K'_H\end{aligned} \tag{2.11}$$

Üblicherweise wird einer der Geschwindigkeitsscales über die Forderung eliminiert, daß die dimensionslose Inkompressibilitätsbedingung (2.3c) parameterfrei wird. Aus

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{L}{H} \frac{W}{U} \frac{\partial w'}{\partial z'} = 0$$

wird somit der Vertikalgeschwindigkeitsscale festgelegt durch

$$W = \frac{H}{L} U \tag{2.12}$$

Die dynamische Druckskalierung mit Hilfe von $P_D = \rho_0 U^2$ wird im folgenden einheitlich verwendet, also auch für die Simulation freier Konvektion über beheizten Berg- und Talhängen, wo kein ausgezeichneter Geschwindigkeitsscale mehr existiert. Unabhängig von der Skalierung wird p auch im Fall erzwungener Konvektion in geschichteter Atmosphäre hier als vollständige Druckstörung behandelt, d.h. eine Aufspaltung in dynamisch bzw. hydrostatisch bedingten Stördruckanteil wird unterlassen.

Die Einführung der dimensionslosen Variablen (2.11) in (2.3a-c) liefert unter Beachtung von (2.12) nach Division jeder Gleichung durch den Maßzahlfaktor des jeweils ersten Terms das *dimensionslose Modellgleichungssystem*, in dem zur Entlastung der Nomenklatur die Striche zur Kennzeichnung der dimensionslosen Variablen nun wieder weggelassen werden:

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + W \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{1}{\epsilon \text{Ro}} V = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.13.1)$$

$$+ 2 \frac{\epsilon}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x} \left[K_M \frac{\partial U}{\partial x} \right] + \frac{1}{\epsilon \text{Re}} \frac{\partial}{\partial z} \left[K_M \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \epsilon^2 \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right] - \frac{1}{\epsilon \text{Ro}} V_g$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + W \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{\epsilon \text{Ro}} U = \quad (2.13.2)$$

$$\frac{\epsilon}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x} \left[K_M \frac{\partial V}{\partial x} \right] + \frac{1}{\epsilon \text{Re}} \frac{\partial}{\partial z} \left[K_M \frac{\partial V}{\partial z} \right] + \frac{1}{\epsilon \text{Ro}} U_g$$

$$U \frac{\partial W}{\partial x} + W \frac{\partial W}{\partial z} = - \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\text{Gr}}{\epsilon^2 \text{Re}^2} \frac{\gamma}{\Theta_0} \quad (2.13.3)$$

$$+ \frac{1}{\epsilon \text{Re}} \frac{\partial}{\partial x} \left[K_M \left(\epsilon^2 \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right] + \frac{2}{\epsilon \text{Re}} \frac{\partial}{\partial z} \left[K_M \frac{\partial W}{\partial z} \right]$$

$$U \frac{\partial \gamma}{\partial x} + W \frac{\partial \gamma}{\partial z} + \left(1 - \frac{\gamma_g}{\gamma_i} \right) W = \quad (2.13.4)$$

$$\frac{\epsilon}{\text{Pr Re}} \frac{\partial}{\partial x} \left[K_M \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right] + \frac{1}{\epsilon \text{Pr Re}} \frac{\partial}{\partial z} \left[K_M \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right]$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (2.13.5)$$

Die 10 Maßzahlen L , H , U , g , f , γ_i , γ_g , Θ_0 , K_M , K_M sind dabei in folgender Weise zu 5 dimensionslosen Parametergruppen und einem geometrischen Maßzahlkoeffizienten zusammengefaßt worden:

▶ RANDBEDINGUNGEN FÜR w

Kinematisch bzw. dynamisch lassen sich Randbedingungen formulieren für

- a) $\forall (\mathbb{U}_T)$
- b) $\frac{\partial \Psi}{\partial n} (\mathbb{U}_T)$
- c) $\mathbb{U}_n (\mathbb{U}_T)$

d.h. für den Windvektor selbst, seine Normalableitung auf dem Rand Γ des Integrationsgebietes G oder für den Spannungsvektor $\mathbb{U}_n = \mathbb{n} \cdot \mathbb{T}(\mathbb{v})$. $\mathbb{n}$ ist der äußere Normalenvektor der Berandungskurve $\Gamma(G)$. Alle drei Randbedingungen kommen im folgenden zur Anwendung.

UNTERER RAND $z = h(x)$

Am unteren (festen) Rand $z = h(x)$ vereinigen sich die kinematische Randbedingung $\mathbb{n} \cdot \mathbb{v} = 0$ und die Haftbedingung $(\mathbb{j} \times \mathbb{n}) \cdot \mathbb{v} = 0$ zu

$$\forall (x, z = h(x)) = 0 \quad (2.14)$$

OBERE RAND $z = H$

Ein vertikaler Impulstransport durch die Obergrenze $z = H$ wurde bis auf wenige Ausnahmen nicht zugelassen, d.h. in fast allen Fällen wurde

$$w(x, H) = 0 \quad (2.15)$$

vorgeschrieben. Bezüglich der Modellphysik impliziert diese Randbedingung die Voraussetzung einer starken Temperaturinversion im Niveau $z = H$. Lediglich in einigen Simulationen der freien Konvektion in Anwesenheit einer explizit durch $\Theta_0(z)$ vorgegebenen Inversion bzw. bei durchgehend schwach stabiler Schichtung wurde mit der Randbedingung $\mathbb{k} \cdot \mathbb{U}_n(x, H) = 0$ experimentiert.

Für $w_h(x, H)$ sind die Randbedingungen

$$w_h(x, H) = w_{h,g} \quad \text{oder} \quad (2.16.1)$$

$$\frac{\partial w_h}{\partial z}(x, H) = 0 \quad (2.16.2)$$

verwendet worden, wobei für freie Konvektion $w_{h,g} = 0$ zu setzen war.

EINSTRÖMRAND $x = 0$

Als Einströmrandbedingungen für erzwungene Konvektion wurden *EKMAN*-Gleichgewichtsströmungen vorgegeben, d.h.

$$w(0, z) = 0 \quad (2.17)$$

und $v_h(0, z)$ als Lösungen des Differentialgleichungsproblems

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(K_M \frac{\partial v_h}{\partial z} \right) - f k \times (v_h - v_{h,g}) = 0 \quad (2.18a)$$

$$v_h(z=0) = 0 \quad (2.18b)$$

$$v_h(z=H) = v_{h,g} \quad (2.18c)$$

(2.18a) beschreibt die Balance von treibender Druckbeschleunigung $f k \times v_{h,g} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla_h p_0$, *CORIOLIS*-Beschleunigung $-f k \times v_h$ und Reibungsbeschleunigung $\frac{\partial}{\partial z} (K_M \frac{\partial v_h}{\partial z})$. Die dem *NEWTON*schen Ansatz für laminare Strömungen nachgebildete Reibungsbeschleunigung ist konsistent mit dem Reibungsansatz in (2.3a), denn die Horizontalkomponente von $\nabla \cdot [K_M (\nabla v + v \nabla)]$ reduziert sich unter der Voraussetzung einer ebenen und horizontalhomogenen Strömung auf $\frac{\partial}{\partial z} (K_M \frac{\partial v_h}{\partial z})$. Dem Einfluß der thermischen Schichtung wurde Rechnung getragen durch die Parameterisierung der turbulenten Viskosität $K_M = K_M(z, z_0, \left| \frac{\partial v_h}{\partial z} \right|, \frac{\partial \theta}{\partial z})$, wofür wieder die Beziehungen (2.4-9) genommen wurden.

Für die numerische Lösung von (2.18a-c) läßt sich der Einsatz der vergleichsweise aufwendigen *Finiten-Elemente-Methode* nicht rechtfertigen. Deshalb wurde ein einfaches Differenzenmodell durch Diskretisierung des Integrationsgebietes $0 \leq z \leq H$ gemäß $z_{i-1} = (i-1) \delta z$ ($i = 1, \dots, 101$; $\delta z = H/100$ m) und Approximation der Vertikalableitungen durch zentrale Differenzen definiert. Mit

$$\left. \frac{\partial}{\partial z} \left(K_M \frac{\partial v_h}{\partial z} \right) \right|_i = \frac{K_{M,i+1/2} (v_{h,i+1} - v_{h,i}) - K_{M,i-1/2} (v_{h,i} - v_{h,i-1})}{(\delta z)^2}$$

lautet das algebraische Abbild des Differentialgleichungsproblems (2.18a-c):

$$K_{M,i-\frac{1}{2}} U_{i-1} - (K_{M,i-\frac{1}{2}} + K_{M,i+\frac{1}{2}}) U_i + K_{M,i+\frac{1}{2}} U_{i+1} + f(\delta z)^2 V_i = f(\delta z)^2 V_g \quad (2.19)$$

$$K_{M,i-\frac{1}{2}} V_{i-1} - (K_{M,i-\frac{1}{2}} + K_{M,i+\frac{1}{2}}) V_i + K_{M,i+\frac{1}{2}} V_{i+1} - f(\delta z)^2 U_i = -f(\delta z)^2 U_g$$

$$U_i = 0, \quad V_i = 0 \quad i = 2, \dots, 100$$

$$U_{101} = U_g, \quad V_{101} = V_g$$

Dieses nichtlineare algebraische System für die Variablen $u_2, \dots, u_{100}$, $v_2, \dots, v_{100}$ ließ sich bereits mit dem einfachsten Verfahren, nämlich der in Kapitel 4 beschriebenen direkten Iteration lösen. Hierbei werden aus den jeweils letzten verbesserten Lösungen u_i^v, v_i^v der v -ten Iteration gemäß (2.4-9) neue Werte für $K_{M,i-\frac{1}{2}} (i=1, \dots, 101)$ berechnet. Mit diesen werden dann wiederum aus (2.19) verbesserte Werte u_i^{v+1}, v_i^{v+1} ermittelt usw., bis ein vorgegebenes Konvergenzkriterium erfüllt wird. Auf diese Weise wird die Lösung des nichtlinearen Problems (2.19) zerlegt in eine Folge linearer Hilfsprobleme, die im vorliegenden Fall jeweils mit Hilfe des GAUSSschen Eliminationsalgorithmus gelöst wurden. Es ist klar, daß dieses Verfahren die Vorgabe einer Startnäherung für die $K_{M,i-\frac{1}{2}}$ oder die $w_{h,i}$ voraussetzt. Am natürlichsten erscheint - gemäß dem Vorschlag von ESTOQUE, BHUMRAKAR [17] -, die Iteration auf der Grundlage einer vorgegebenen K_M -Verteilung aufzubauen. Gegenüber [16], wo als Startnäherung $K_M(\kappa) = \text{const} = 10 \text{ m}^2/\text{sec}$ diente, wurde in der vorliegenden Arbeit von einer Interpolation für K_M nach O'BRIEN [44] ausgegangen. Vergleichende Iterationen mit konstanter Anfangsverteilung von K_M zeigten, daß die nach O'BRIEN berechneten K_M -Startprofile sowohl Konvergenz als auch Konvergenzgeschwindigkeit der Iteration begünstigten.

Die $K_M(z)$ -Modellierung von O'BRIEN basiert auf einer HERMITE-Interpolation in Gestalt eines Polynoms 3. Grades im Intervall $h_p \leq z \leq H$, wobei h_p die vorzugebende Höhe der PRANDTLschen Bodenschicht ist. Als Bestimmungsstücke für die 4 Entwicklungskoeffizienten werden $K_M(h_p)$, $\frac{\partial K_M}{\partial z}(h_p)$, $K_M(H)$, $\frac{\partial K_M}{\partial z}(H)$ vorgegeben. Zur Bestimmung der turbulenten Viskosität und ihrer Vertikalableitung im Niveau $z = h_p$ wäre eine explizite Modellierung der bodennahen Grenzschicht erforderlich. Da diese O'BRIEN-Interpolation hier aber nur zur Konstruktion eines gegenüber $K_M(\kappa) = \text{const}$ realistischen Anfangsprofils für

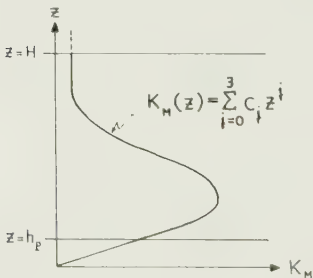


Abb. 8: Zur O'BRIEN-Interpolation die iterative Lösung von (2.19)

diente, wurden die beiden kritischen Bestimmungsstücke $K_M(h_p)$ und $\frac{\partial K_M}{\partial z}(h_p)$ in der vorliegenden Arbeit über eine sehr einfache Schließungsannahme bestimmt. Dazu dienten die Beziehungen

$$K_M(z) = \frac{k u_* z}{\phi_M\left(\frac{z}{L}\right)} \quad (2.20.1)$$

$$\phi_M\left(\frac{z}{L}\right) = 1 + \alpha \frac{z}{L} \quad (L > 0) \quad (2.20.2)$$

Wird nun der Längenscale L geschrieben als

$$L = \frac{u_*^3 \theta_o Pr}{k g K_M \frac{\partial \theta}{\partial z}} \quad (2.20.3)$$

dann ist unter der hier ohnehin zugrundegelegten Voraussetzung $Pr = \text{const}$ folgende Rückkoppelung durch Einsetzen von (2.20.3) in (2.20.1,2) möglich:

$$K_M(z) = \frac{k u_* z}{\alpha k \frac{g}{\theta_o} \frac{\partial \theta}{\partial z} z K_M(z) + \frac{u_*^3 Pr}{K_M(z)}}$$

Von den beiden Lösungen dieser quadratischen Gleichung für $K_M(z)$ bleibt unter der Voraussetzung stabiler Schichtung ($\partial \theta / \partial z > 0$) vorzeichenmäßig nur eine sinnvoll, nämlich

$$K_M(z) = \frac{a}{z} \left(\sqrt{1 + b z^2} - 1 \right) \quad (2.21)$$

mit

$$a = \frac{u_*^3 \theta_o Pr}{2 \alpha k g \frac{\partial \theta}{\partial z}}, \quad b = \frac{4 \alpha k^2 g \frac{\partial \theta}{\partial z}}{u_*^2 \theta_o Pr}$$

Der neutrale Fall ist als Grenzwert in (2.21) enthalten, jedoch ist $\lim_{\partial \theta / \partial z \rightarrow 0} K_M(z) = k u_* z$ nur durch Anwendung der Grenzwertregel von de l'HOSPITAL zu erhalten.

Aus (2.21) wurden die zur Bestimmung der O'BRIEN-Interpolation erforderlichen Werte von $K_M(h_p)$ und $\frac{\partial K_M}{\partial z}(h_p)$ in einer für den hier erklärten Zweck ausreichenden Genauigkeit bestimmt. Zur Auswertung von (2.21) wurden folgende Werte genommen: $\alpha = 4.7$ (nach [4]), $k = 0.4$, $T_o (\approx \theta_o) = 290 \text{ K}$, $Pr = 0.7$ und $u_* = 0.3 \text{ m/sec}$. Im Niveau $z = H$ wurde $K_M(H) = 0.5 \text{ m}^2/\text{sec}$ und $\frac{\partial K_M}{\partial z}(H) = 0$ vorgegeben.

Bei der (2.18a-c) zugrundeliegenden regulären Diskretisierung $z_{i-1} = (i-1) \delta z$ ist das unterste Niveau, in dem Variablen berechnet werden, $z_2 = \delta z = 20 \text{ m}$. Damit wird die in (2.6) enthaltene Berück-

sichtigung der Bodenrauigkeit über z_0 wirkungslos. Da jedoch die Ablenkung des bodennahen Windes von der Richtung der aufgeprägten Druckbeschleunigung $f k \times w_{h,g} = -\frac{1}{g_0} \nabla_n p_0$ sehr empfindlich von der Bodenrauigkeit abhängt, muß die Rauigkeitslänge auf andere Weise in (2.18a-c) berücksichtigt werden. Hier wurde dies in Anlehnung an WIPPERMANN [76] durch eine Korrektur der nach (2.4-9) berechneten turbulenten Viskosität im untersten Zwischenniveau $z_{1,5} = \delta z/2$ realisiert. Diese Korrektur von $K_{M,1,5}$ ist das Ergebnis einer Modifikation der Differenzenapproximation (2.19) im Niveau $z_2 = \delta z$:

$$\frac{1}{\delta z} \left(K_{M,2,5} \frac{\partial w_h}{\partial z} \Big|_{2,5} - K_{M,1,5} \frac{\partial w_h}{\partial z} \Big|_{1,5} \right) = f k \times (w_{h,2} - w_{h,g}) \quad (2.22)$$

Für $\frac{\partial w_h}{\partial z} \Big|_{2,5}$ wird dieselbe zentrale Differenzenapproximation genommen wie für $i \geq 3$. Dagegen wird $\frac{\partial w_h}{\partial z} \Big|_{1,5}$ mit Rücksicht auf $w_{h,1,5} = \frac{1}{2} w_{h,2}$ (d.h. $w_{h,1,5}^0 = w_{h,2}^0$) und $\frac{\partial w_h^0}{\partial z} = 0$ für $z < z_P$ ($w_h^0 = w_h / |w_h|$) wie folgt modifiziert:

$$\frac{\partial w_h}{\partial z} \Big|_{1,5} = \frac{\partial |w_h|}{\partial z} \Big|_{1,5} w_{h,1,5}^0 =: \frac{\partial |w_h|}{\partial z} \Big|_{1,5}^{\text{KORR}} w_{h,2}^0 \quad (2.23)$$

$\frac{\partial |w_h|}{\partial z} \Big|_{1,5}^{\text{KORR}}$ wird nun nicht differenzenapproximiert, sondern aus den Profilgleichungen der PRANDTL-Grenzschicht abgeleitet. Dazu wurde hier mit geringfügiger Abweichung gegenüber [76] aus der differentiellen und der integrierten Profilgleichung für schwach diabatische Schichtung

$$\begin{aligned} \frac{\partial |w_h|}{\partial z} &= \frac{u_*}{k z} \phi_M, \quad (\phi_M = 1 + \alpha \frac{z}{L}) \\ |w_h| &= \frac{u_*}{k} \left(\ln \frac{z}{z_0} + \phi_M - 1 \right) \end{aligned}$$

die Schubspannungsgeschwindigkeit u_* eliminiert und die resultierende Beziehung

$$\frac{\partial |w_h|}{\partial z} = \frac{|w_h| \phi_M}{z \left(\ln \frac{z}{z_0} + \phi_M - 1 \right)}$$

im Niveau $z_{1,5} = \delta z/2$ ausgewertet. Mit $|w_{h,1,5}| = \frac{1}{2} |w_{h,2}|$ ergibt sich

$$\frac{\partial |w_h|}{\partial z} \Big|_{1,5} = \frac{\phi_{M,1,5}}{\ln \frac{\delta z}{2 z_0} + \phi_{M,1,5} - 1} \frac{|w_{h,2}|}{\delta z}$$

Dieser Wert wurde als $\left. \frac{\partial |w_h|}{\partial z} \right|_{1,5}^{\text{KORR}}$ in (2.23) verwendet, so daß sich die Differenzenapproximation ergab zu

$$\frac{1}{(\delta z)^2} \left[K_{M,2,5} (w_{h,3} - w_{h,2}) - \gamma K_{M,1,5} w_{h,2} \right] = f k \times (w_{h,2} - w_{h,1}) \quad (2.24)$$

$$\gamma = \frac{\phi_{M,1,5}}{\ln \frac{\delta z}{2z_0} + \phi_{M,1,5} - 1}$$

Ein Vergleich von (2.24) mit den Approximationen (2.19) für $i \geq 3$ zeigt, daß die Profilkorrektur am Ende auf eine Modifikation der turbulenten Viskosität im untersten Zwischenniveau hinausläuft, indem $K_{1,5}$ mit dem Korrekturfaktor γ (< 1) multipliziert erscheint. Im Vergleich zu [76], wo neben $\phi_{M,1,5} = \phi_M(z = \delta z/2)$ auch $\phi_{M,2} = \phi_M(z = \delta z)$ berücksichtigt wird, ergeben sich im vorliegenden Fall für $z_0 = 0.05$ m je nach Schichtungsstabilität um 1 - 3° kleinere Ablenkungen des bodennahen Windes gegenüber der aufgeprägten Druckbeschleunigung.

Natürlich hätte im Fall des eindimensionalen Modells (2.18) die beschriebene Profilkorrektur leicht umgangen werden können. Dazu hätte nur die reguläre Diskretisierung durch eine geeignete Koordinatentransformation $\xi = \xi(z)$ in eine für $\xi \rightarrow 0$ immer höher auflösende Diskretisierung bis hin zu $\delta z(\xi) < z_0$ überführt zu werden brauchen. Anhand des einfachen Differenzenmodells (2.18) für die Beschaffung der Einströmrandbedingung ließ sich die Idee der Profilkorrektur jedoch wesentlich klarer darstellen, als mit dem entsprechenden Verfahren im Rahmen der Finite-Elemente-Diskretisierung des Modellgleichungssystems (2.3).

Zur numerischen Lösung von (2.18) mit direkter Iteration muß auf eine Komplikation hingewiesen werden. Insbesondere bei Schichtungsstabilitäten $\partial\theta/\partial z > 0.35$ K/100 m traten bei der Iteration Oszillationen zwischen zwei konvergenten Lösungen für $w_{h,i}$ bzw. $K_{M,i-1/2}$ auf. Dies konnte vermieden, d.h. die Konvergenz hergestellt werden, indem für den jeweils $(\nu+1)$ ten Iterationszyklus nicht nur die zuletzt berechneten $K_{M,i-1/2}^\nu$, sondern ein gemäß

$$K_{M,i-1/2}^{\nu,\sigma} = \sigma K_{M,i-1/2}^\nu + (1-\sigma) K_{M,i-1/2}^{\nu-1} \quad (0 < \sigma < 1)$$

gewogenes Mittel der beiden vorangegangenen K_M -Lösungen genommen wurde. Abb. 9 zeigt exemplarisch für $\partial\theta/\partial z = 0.35$ K/100 m den Unterschied zwischen der mit dem K_M -Profil nach O'BRIEN und der mit (2.4-9) berechneten $w_h(z)$ -Verteilung.

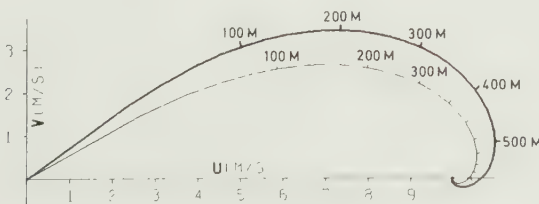


ABB. 9: HODOGRAPHEN DER EKMAN-START-UND-ENDLÖSUNG
 — : FÜR K_M (O'BRIEN)
 — : FÜR K_M (ITERIERT)

Alle sich für $|v_{h,0}| = 10 \text{ m/sec}$ und $z_0 = 0.05 \text{ m}$ als Lösungen von (2.18) ergebenden Einstromrandbedingungen, die in dieser Arbeit benötigt wurden, sind in Abb. 10 dargestellt.

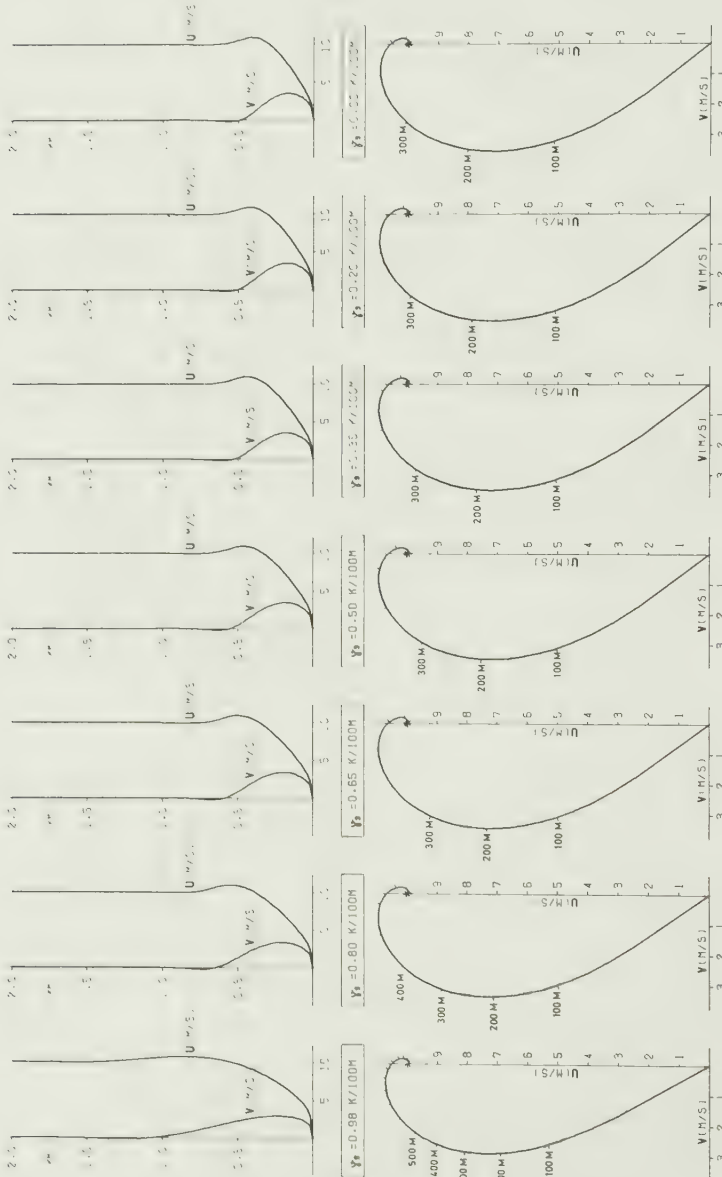


ABB. 10: BERECHNETE EINSTROM-RANDBEDINGUNGEN FÜR DIE WINDKOMPONENTEN U UND V FÜR AUSGEWÄHLTE SCHICHTUNGSSTABILITÄTEN ($U_0 = 10 \text{ m/s}$, $z_0 = 0.05 \text{ m}$)

OBERE ABBLDUNGSREIHE: $U(z)$ -UND $V(z)$ -PROFILE
 UNTERE ABBLDUNGSREIHE: ZUGEHÖRIGE HOLOGRAPHEN

AUSSTRÖMRAND $x = L$

Alle numerischen Experimente dieser Arbeit haben den allgemein bekannten Sachverhalt bestätigt, daß die dynamischen Randbedingungen am Ausströmrand von ausschlaggebender Bedeutung für die Konvergenz der nichtlinearen Iteration sind. Demgegenüber erwies sich die physikalische Bedeutung der Ausströmrandbedingung als gering. Sämtliche konvergenten Ergebnisse zeigten, daß sich Unterschiede im Strömungsfeld als Folge verschiedener Randbedingungen bereits in geringer Entfernung stromaufwärts vom Rand verlieren. Dieser Befund rechtfertigt im nachhinein, die Ausströmrandbedingung mit Blick auf die Konvergenz bzw. Konvergenzgeschwindigkeit der nichtlinearen Iteration auszuwählen. Hierbei ist durch folgende Überlegung eine klare Leitlinie gegeben:

Eine wesentliche Ursache für Nichtkonvergenz ist das Auftreten räumlicher Oszillationen als Folge 'zu fester' Ausströmrandbedingungen. Das sind z.B. *DIRICHLET*-Randbedingungen für $v_h(L, z)$ bzw. $w(L, z)$, die sich in der Regel nur schwer so formulieren lassen, daß sie kompatibel mit der lokalen Dynamik im Innengebiet sind. Die Folge ist, daß die Auslaufströmung auf ein Hindernis in Gestalt einer zu zwinghaften Randbedingung am Ausströmrand 'aufläuft'. Der Bereich vor dem Ausströmrand, in dem sich die Innenlösung an die Ausströmrandbedingung anpassen muß, nimmt mit wachsender *REYNOLDS*-Zahl ab. Daher werden insbesondere bei stark durch Trägheitseffekte bestimmten Strömungen und Vorgabe von *DIRICHLET*-Randbedingungen große Gradienten unmittelbar vor dem Ausströmrand entstehen. Wegen der begrenzten Auflösungsfähigkeit räumlicher Diskretisationen entsteht in diesem Gebiet ein Approximationsdefekt, der ein numerisches Pendant ist zum klassischen Singularitätenproblem der Überbestimmung durch Randbedingungen im Grenzfall $Re \rightarrow \infty$ (vgl. z.B. SCHLICHTING [58] und die dort zitierte Veranschaulichung eines mechanischen Analogons am Beispiel der Gleichung für die gedämpfte Schwingung von PRANDTL).

Eine ungemein instruktive Demonstration und Erklärung der Entstehung von räumlichen Oszillationen der Lösung einer *Differenzengleichung* als Folge zu starker Gradienten im Bereich des Ausströmrandes präsentiert ROACHE [57]. Er zeigt, daß die Differenzenapproximation einer linearen Advektions-Diffusionsgleichung Oszillationen in der Nachbarschaft des *DIRICHLET*-Randwertes produziert, wenn die mit Hilfe des Gitterinkrements definierte Gitter-*REYNOLDS*-Zahl einen kritischen Wert überschreitet. Dieses Beispiel macht deutlich, daß solche von der Ausströmrandbedingung induzierten Oszillationen nichts mit nichtlinearen Effekten zu tun haben. Sie sind viel elementarer eine Folge davon, daß die durch Unverträglichkeit der Ausströmrandbedingung mit der 'advehierten' Innenlösung erzeugten starken Gradienten nicht von der räumlichen Diskretisierung aufgelöst werden können. Aus dem Vorstehenden ergibt sich ein Kriterium für die Auswahl von Ausströmrandbedingungen, die keine oder nur schwache Oszillationen erzeugen: Die Randbedingung am Ausströmrand muß möglichst wenig einschränkend formuliert werden, d.h. so, daß die Strömung am Rand $x = L$ auf ein möglichst schwaches Hindernis aufläuft. Statt einer *DIRICHLET*-Bedingung für v_h und/oder w wird also jede physikalisch einigermaßen plausible differentielle oder gemischte Randbedingung bessere Dienste leisten.

Solche Randbedingungen werden in der Regel eingeführt durch Annahmen über die Normalableitung von w auf dem Rand bzw. über den Spannungsvektor.

Hinsichtlich der ersten Möglichkeit wurde in einigen Experimenten die homogene Randbedingung

$$\frac{\partial v}{\partial x}(L, z) = 0 \quad (2.25)$$

verwendet.

Für den in (2.3a) verwendeten Spannungstensor

$$\mathbb{T} = -p \mathbb{E} + g_o K_M (\nabla v + v \nabla) \quad (2.26)$$

($\mathbb{E} = \hat{i}\hat{i} + \hat{j}\hat{j} + \hat{k}\hat{k}$) ergibt sich der Spannungsvektor bezüglich der Normalen n als

$$\mathbb{T}_n = n \cdot \mathbb{T} = -p n + g_o K_M \left(\frac{\partial v}{\partial n} + \nabla v_n \right) \quad (2.27)$$

Am Ausströmrand ist $n = x$, $n = \hat{i}$, $v_n = u$ und damit

$$\mathbb{T}_n = \mathbb{T}_x = -p \hat{i} + g_o K_M \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \nabla u \right) \quad (2.28)$$

Unter Beachtung der vorausgesetzten Homogenität in y -Richtung lauten die Spannungskomponenten $t_{xx} = \hat{i} \cdot \mathbb{T}_x$, $t_{xy} = \hat{j} \cdot \mathbb{T}_x$, $t_{xz} = \hat{k} \cdot \mathbb{T}_x$:

$$t_{xx} = -p + 2 g_o K_M \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.29.1)$$

$$t_{xy} = g_o K_M \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.29.2)$$

$$t_{xz} = g_o K_M \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (2.29.3)$$

Die meisten numerischen Simulationen mit dem vorliegenden Modell wurden durchgeführt mit der Randbedingung

$$\mathbb{T}_x(L, z) = 0 \quad (2.30)$$

die sich in der schwachen Formulierung der zu (2.3) gehörigen GALERKIN-Gleichungen (s. (2.42)) als *natürliche* Randbedingung anbietet. Durch eine alternative partielle Integration mit Hilfe des GAUSSschen Integralsatzes in den GALERKIN-Gleichungen läßt sich statt (2.28) auch ein Teil des Spannungsvektors als Integrand des

Berandungsintegrals einführen. Mit der dadurch angebotenen *natürlichen* Randbedingung

$$\left(-p^i + g_0 K_m \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{L,z} = 0 \quad (2.31)$$

wurde neben (2.25) und (2.30) ebenfalls experimentiert. Bezüglich der Vertikalkomponente sind (2.25) und (2.31) identisch: $\frac{\partial w}{\partial x}(L,z) = 0$.

Insbesondere für hohe Werte der aufgeprägten Druckbeschleunigung und große Temperaturstörungen läßt sich für begrenzte Auslaufgebiete physikalisch weder eine der hier vorgestellten noch der sonst in der Literatur diskutierten Ausströmrandbedingungen favorisieren. So läßt sich z.B. - ganz abgesehen vom oben beschriebenen Problem der räumlichen Oszillationen - für Fälle, in denen Leewellen bzw. durch Grenzschichtablösung oder thermischen Auftrieb hervorgebrachte Wirbel weit stromabwärts reichen, keine plausible Randbedingung für $v(L,z)$ angeben. In denselben Fällen ist aber offensichtlich auch eine Randbedingung für $\frac{\partial v}{\partial x}(L,z)$ nicht plausibel zu machen. Auf der anderen Seite zeigt gerade bei fast ungestörten Auslaufströmungen die Randbedingung $t_{xz}(L,z) = 0$ Inkompatibilität mit der in diesem Fall durchaus begründeten Bedingung $\frac{\partial w}{\partial x}(L,z) = 0$. Mit Rücksicht auf (2.29.3) wäre dann nämlich auch $\frac{\partial u}{\partial z}(L,z) = 0$, was im Widerspruch zur Haftbedingung am Boden stünde, die immer $\frac{\partial u}{\partial z} \neq 0$ erzwingt. Physikalisch ist somit jede Auslaufrandbedingung immer ein mehr oder weniger plausibler Kompromiß und die Auswahl erfolgt meist nach dem Kriterium der numerischen Verträglichkeit.

Dem Ergebnisbericht sei hier vorweggenommen, daß sich bei den umfangreichen Experimentreihen die Randbedingungen (2.30) und (2.31) als etwa gleichwertig und am meisten geeignet erwiesen haben. Das gilt insbesondere für die kritischen Fälle, in denen durch Leewellen oder Ablösewirbel erzeugte große Trägheitsbeschleunigungen in der Umgebung des Randes $x=L$ auftraten. Demgegenüber ließen sich erwartungsgemäß bei Versuchen mit *DIRICHLET*-Randbedingungen für $v(L,z)$ selbst bei neutraler Schichtung und ohne thermischen Antrieb mit den gewählten Elemententeilungen keine konvergenten Lösungen gewinnen.

► RANDBEDINGUNGEN FÜR $\mathcal{V}$

Die Temperaturrandbedingungen wurden möglichst einfach, aber kompatibel mit den Randbedingungen für v vorgeschrieben.

Am Boden ist mit verschiedenen $\mathcal{V}$ -Verteilungen in Gestalt von

$$\mathcal{V}(x, z = h(x)) = f(x) \quad (2.32)$$

experimentiert worden. $f(x)$ wurde jeweils so gewählt, daß realistische Bedingungen für die Ausbildung freier thermischer Konvektion bzw. anabatischer und katabatischer Zirkulationen approximiert wurden. In den Experimenten zur Leewellensimulation für verschiedene thermische Schichtungen des Grundzustandes wurde

$$\psi(x, z = h(x)) = 0 \quad (2.33)$$

gewählt. Eine Ausnahme bildeten die Experimente zur Untersuchung des Einflusses eines erwärmten Hanges auf Leewellen, wo der thermische Antrieb wieder durch (2.32) vermittelt wurde.

Am oberen Rand wurde in Einklang mit der Randbedingung (2.15)

$$\psi(x, H) = 0 \quad (2.34)$$

festgelegt. (2.34) erwies sich jedoch als unverträglich mit der in einigen Experimenten verwendeten dynamischen Randbedingung $t_{zz}(x, H) = 0$. In diesen Fällen wurde $\frac{\partial \psi}{\partial z}(x, H) = 0$ genommen.

Für den Einströmrund wurden durchweg ungestörte thermische Verhältnisse vorausgesetzt, d.h.

$$\psi(0, z) = 0 \quad (2.35)$$

Am Ausströmrund erwies sich die homogene Randbedingung

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(L, z) = 0 \quad (2.36)$$

als kompatibel mit den verwendeten kinematischen bzw. dynamischen Randbedingungen (2.25), (2.30), (2.31). Eine DIRICHLET-Bedingung für $\psi(L, z)$ verbietet sich von vornherein, denn diese wäre ein zu starkes 'Hindernis' für stromabwärts advehierte oder etwa durch Leewellen induzierte Temperaturstörungen.

► DIE DRUCKNORMIERUNG

Eine Eigentümlichkeit inkompressibler Strömungen besteht darin, daß für die ursprünglichen Gleichungen überhaupt keine bzw. für das separierte System (Vorticitygleichung und aus der Divergenzgleichung gewonnene POISSON-Gleichung für p) nur aus dem $\mathbf{v}$ -Feld berechnete

NEUMANN - Druckrandbedingungen vorgegeben werden dürfen. Das folgt aus der besonderen Bedeutung des Druckes in inkompressiblen bzw. BOUSSINESQ - inkompressiblen Strömungen. Am klarsten kommt dies in der EULERSchen Bewegungsgleichung zum Ausdruck, denn hier erweist sich, wie z.B. SOMMERFELD [64] zeigt, der Druck als LAGRANGEScher Parameter für die Inkompressibilitätsbedingung $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ im HAMILTON - Prinzip. Von daher ist klar, daß jede willkürliche Vorschrift von Randbedingungen für den Druck das Prinzip der Massenerhaltung verletzt.

Das steht nicht im Widerspruch dazu, daß bei der separaten Behandlung mit abgekoppelter Druckberechnung ein Randwertproblem in Gestalt einer POISSON - Gleichung für p auftaucht. Diese explizite Druckberechnung muß nämlich als NEUMANNsches Randwertproblem formuliert werden, wobei die Randbedingung für $\frac{\partial p}{\partial n}(\mathbf{r}_r)$ nicht willkürlich vorgegeben werden darf, sondern konsistent mit der ursprünglichen Bewegungsgleichung sein muß. Das bedeutet, sie muß als $\frac{\partial p}{\partial n}(\mathbf{r}_r) = \mathbf{n} \cdot \nabla p|_r$ formuliert werden, wobei $\nabla p|_r$ durch Auflösen der Bewegungsgleichungskomponenten nach $\frac{\partial p}{\partial x}$ und $\frac{\partial p}{\partial z}$ als Funktionen des vorher berechneten $\mathbf{v}$ -Feldes bestimmt wird.

Durch die ursprünglichen Gleichungen ist der Druck andererseits nur bis auf eine willkürliche Konstante bestimmt, denn er kommt dort nicht explizit, sondern nur in ersten Ableitungen vor. Hat man nämlich das $\mathbf{v}$ -Feld separat berechnet, dann erfordert die Druckberechnung mit Hilfe der ursprünglichen Gleichungen durch Integration von $\frac{\partial p}{\partial x} = f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ bzw. $\frac{\partial p}{\partial z} = f_2(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ die Vorgabe eines 'Anfangswertes' für p am Startpunkt der Integration in x - und z -Richtung. Hinsichtlich dieser Drucknormierung sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Werden auf dem Ausströmrand Bedingungen des Typs (2.30) oder (2.31) vorgegeben, dann kommt durch sie eine implizite Drucknormierung zustande. Eine zusätzliche explizite Vorgabe eines Druckwertes bewirkt dann sogar eine Überbestimmung des Gesamtgleichungssystems. Bei einigen (in anfänglicher Unkenntnis dieses Sachverhaltes) durchgeführten Experimenten mit einer solchen überbestimmenden Drucknormierung entstand am jeweiligen Normierungsknotenpunkt eine Drucksingularität, die stets eine Quelle für räumliche Oszillationen im $\mathbf{v}$ -Feld war. Auf der anderen Seite wirkte die implizite Drucknormierung im Fall der am häufigsten verwendeten Ausströmrandbedingung (2.30) so, daß sich das Stördruckfeld fast exakt auf $p(l, z) = 0$ einstellte.

Abgesehen von der meteorologisch irrelevanten eingeschlossenen Konvektion ($\mathbf{v}(\mathbf{r}_r) = 0$) ist eine explizite Drucknormierung nur erforderlich im Zusammenhang mit der Ausströmrandbedingung (2.25), die aber zugunsten der dynamischen Bedingungen (2.30) bzw. (2.31) nur in anfänglichen Testexperimenten verwendet wurde.

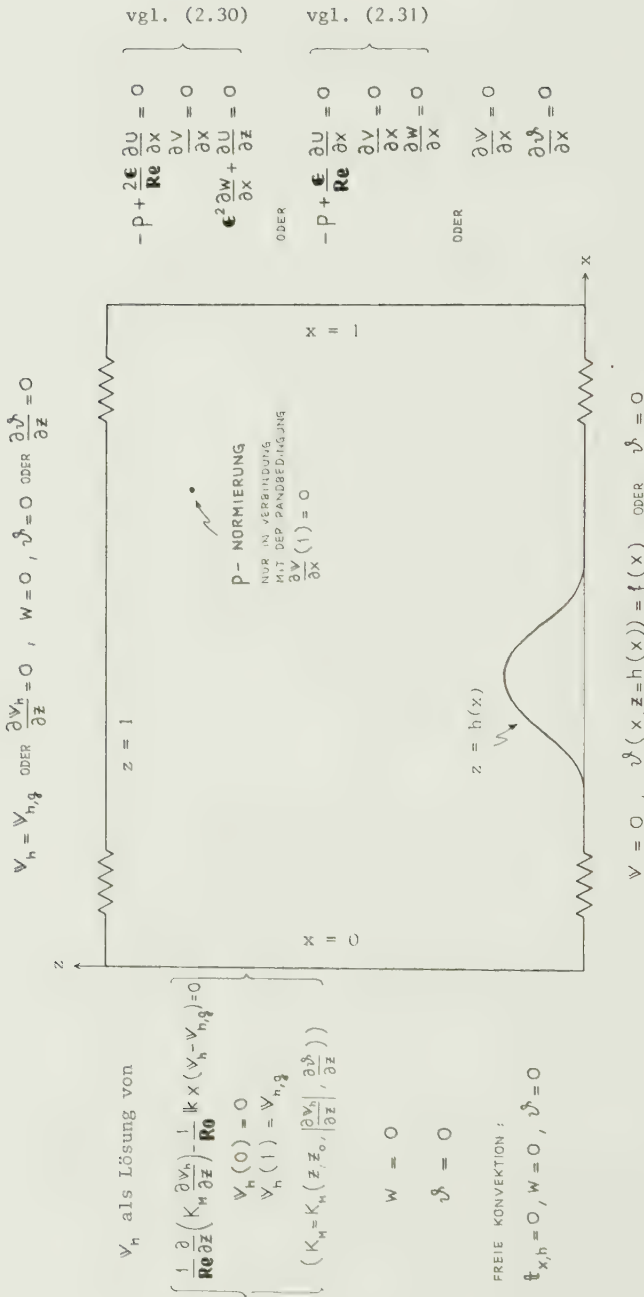


Abb. 11: Zusammenstellung der im folgenden verwendeten Randbedingungen in dimensionsloser Form

2.4 DAS SYSTEM DER GLOBALEN GALERKIN - GLEICHUNGEN

Um die Klarheit der folgenden Darstellung nicht durch ständige Mitführung der dimensionslosen Parameter zu stören, wird die Formulierung der GALERKIN - Gleichungen zunächst für das dimensionsbehaftete System (2.3) durchgeführt. Erst bei der Bildung der Elementbeiträge (s. S 64) wird dann wieder zur dimensionslosen Form übergegangen. Speziell für die Bewegungsgleichung wird das Residuum erst nach Durchführung der erforderlichen partiellen Integrationen gebildet, um die zur Anwendung der GAUSSschen Integralsätze notwendige Stetigkeit der Integranden sicherzustellen.

DIE BEWEGUNGSGLEICHUNG

Für eine beliebige stetige Ortsfunktion $N(\mathbf{r})$ gilt mit (2.3a) trivialerweise

$$\begin{aligned} \iint_G N \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{f} + \mathbf{k} \times \iint_G N \mathbf{v}_n \, d\mathbf{f} + \frac{1}{g_0} \iint_G N \nabla p \, d\mathbf{f} - g \mathbf{k} \iint_G N \frac{\partial}{\partial z} \, d\mathbf{f} - \\ - \frac{1}{g_0} \iint_G N \nabla \cdot [\mathbf{g}_0 K_M (\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla)] \, d\mathbf{f} - \mathbf{k} \times \mathbf{v}_{n,q} \iint_G N \, d\mathbf{f} = 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

Im Unterschied zu Kap. I, wo die Dimension des Gebietes G noch nicht festgelegt war, soll das Symbol $\iint_G d\mathbf{f}$ zum Ausdruck bringen, daß das Gebietsintegral jetzt speziell ein Doppelintegral bezüglich zweier Koordinaten in der $x-z$ -Ebene ist. $d\mathbf{f}$ ist das auf G definierte Flächenelement.

Bei den folgenden partiellen Integrationen wird Gebrauch gemacht von den GAUSSschen Integralsätzen für ein Vektorfeld $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ bzw. ein Skalarfeld $\psi(\mathbf{r})$:

$$\iint_G \nabla \cdot \mathbf{a} \, d\mathbf{f} = \oint_{\Gamma(G)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} \, ds \quad (2.38.1)$$

$$\iint_G \nabla \psi \, d\mathbf{f} = \oint_{\Gamma(G)} \psi \, \mathbf{n} \, ds \quad (2.38.2)$$

worin $\mathbf{n}$ der äußere Normalenvektor und ds das Linienelement der Berandungskurve $\Gamma(G)$ ist. Durch unterschiedliche partielle Integration in (2.37) lassen sich drei äquivalente Alternativformen erzeugen:

► Die erste Form ergibt sich bei Einarbeitung der Inkompressibilitätsbedingung in die Reibungsbeschleunigung vor Ausführung der partiellen Integration. Mit

$$\nabla \cdot [K_M (\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla)] = \nabla K_M \cdot (\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla) + K_M \nabla^2 \mathbf{v}$$

und Anwendung der partiellen Integration nur auf den LAPLACE-Term unter Beachtung von (2.38.1)

$$\iint_G NK_M \nabla^2 v \, d\mathbf{f} = \oint_{\Gamma(G)} NK_M \frac{\partial v}{\partial n} \, ds - \iint_G \nabla(NK_M) \cdot \nabla v \, d\mathbf{f}$$

kommt die GALERKIN-Gleichung (2.37) auf die Form

$$\begin{aligned} \iint_G N \mathbf{v} \cdot \nabla v \, d\mathbf{f} + \int \mathbf{k} \times \iint_G N \mathbf{v}_h \, d\mathbf{f} + \frac{1}{g_0} \iint_G N \nabla p \, d\mathbf{f} - g \mathbf{k} \iint_G N \frac{\partial}{\partial \theta_0} \, d\mathbf{f} + \\ + \iint_G (K_M \nabla N \cdot \nabla v - N \nabla K_M \cdot \nabla v) \, d\mathbf{f} - \int \mathbf{k} \times \mathbf{v}_{h,q} \iint_G N \, d\mathbf{f} - \\ - \oint_{\Gamma(G)} NK_M \frac{\partial v}{\partial n} \, ds = 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

und der Integrand des Randintegrals bietet die Einführung einer natürlichen Randbedingung für $\frac{\partial v}{\partial n}$ (speziell von (2.25)) an.

▷ Ausdehnung der partiellen Integration auf das Druckbeschleunigungsintegral mit Berücksichtigung von (2.38.2), d.h.

$$\iint_G N \nabla p \, d\mathbf{f} = \oint_{\Gamma(G)} N p \, n \, ds - \iint_G (\nabla N) p \, d\mathbf{f} \quad (2.40)$$

führt auf die zweite Variante der GALERKIN-Gleichung (2.37)

$$\begin{aligned} \iint_G N \mathbf{v} \cdot \nabla v \, d\mathbf{f} + \int \mathbf{k} \times \iint_G N \mathbf{v}_h \, d\mathbf{f} - \frac{1}{g_0} \iint_G (\nabla N) p \, d\mathbf{f} - g \mathbf{k} \iint_G N \frac{\partial}{\partial \theta_0} \, d\mathbf{f} + \\ + \iint_G (K_M \nabla N \cdot \nabla v - N \nabla K_M \cdot \nabla v) \, d\mathbf{f} - \int \mathbf{k} \times \mathbf{v}_{h,q} \iint_G N \, d\mathbf{f} - \\ - \frac{1}{g_0} \oint_{\Gamma(G)} N (-p \mathbf{n} + g_0 K_M \frac{\partial v}{\partial n}) \, ds = 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

und das Randintegral steht zur Aufnahme der Randbedingung (2.31) bereit.

▷ Um schließlich für t_n eine natürliche Randbedingung (speziell die Ausströmrandbedingung (2.30)) einführen zu können, wird die Inkompressibilitätsbedingung $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ erst nach Durchführung der partiellen Integration in Druck- und Reibungsbeschleunigungsterm von (2.37) berücksichtigt. Mit

$$\begin{aligned} \iint_G N \nabla \cdot [K_M (\nabla v + v \nabla)] df &= \oint_{\Gamma(G)} NK_M \left(\frac{\partial v}{\partial n} + \nabla v_n \right) ds - \\ &- \iint_G K_M \nabla N \cdot (\nabla v + v \nabla) df \end{aligned}$$

und wieder mit (2.40) erhält man diesmal

$$\begin{aligned} \iint_G N v \cdot \nabla v df + f k \times \iint_G N v_n df - \frac{1}{g_0} \iint_G (\nabla N) p df - g k \iint_G N \frac{\partial^2}{\partial_0} df + \\ + \iint_G K_M \nabla N \cdot (\nabla v + v \nabla) df - f k \times v_{n,q} \iint_G N df - \quad (2.42) \\ - \frac{1}{g_0} \oint_{\Gamma(G)} N \left[-p n + g_0 K_M \left(\frac{\partial v}{\partial n} + \nabla v_n \right) \right] ds = 0 \end{aligned}$$

Gemäß dem in Kap. I dargestellten GALERKIN-Verfahren werden nun globale Approximationsfunktionen

$$\begin{aligned} \hat{v} &= \hat{v}(x, v_1, \dots, v_M) \\ \hat{\psi} &= \hat{\psi}(x, \psi_1, \dots, \psi_M) \\ \hat{p} &= \hat{p}(x, p_1, \dots, p_M) \\ \hat{K}_M &= \hat{K}_M(x, K_{M,1}, \dots, K_{M,M}) \\ \hat{K}_H &= \hat{K}_H(x, K_{H,1}, \dots, K_{H,M}) \end{aligned} \quad (2.43)$$

eingeführt, mit denen die Residuen der Gleichungen (2.3) gebildet werden. Die Approximationsfunktionen für v , ψ , K_M und K_H enthalten jeweils so viele (M) Funktionswerte v_i , ψ_i , $K_{M,i}$ bzw. $K_{H,i}$ wie Knotenpunkte für die räumliche Diskretisierung definiert werden. Zum Aufbau der Approximationsfunktion für p werden dagegen nur M ($M < N$) Knotenpunkte als Stützstellen verwendet. Das entspricht einer aus der numerischen Erfahrung abgeleiteten Forderung, nach der die elementweise räumliche Interpolation des Druckes von geringerer Ordnung sein soll als die Interpolation von w . Seit den ersten hydrodynamischen Finite-Elemente-Modellierungen auf der Basis der ursprünglichen Gleichungen ist bekannt, daß Ansatzfunktionen für v und p von gleicher Interpolationsordnung zu schlecht konditionierten Matrizen in den algebraischen GALERKIN-Gleichungssystemen führen. Für diesen empirischen Befund wurden verschiedene Deutungs-

versuche angeboten, aber eine allgemein akzeptierte Erklärung steht zur Zeit noch aus. TAYLOR und HOOD [28] argumentieren mit dem Begriff der Fehlerkonsistenz und fordern, daß die Approximationen für w und p Fehler gleicher Größenordnung zum GALERKIN-Integral bzw. zum Funktional des STOKESschen Variationsproblems beitragen. Da in beiden w in ersten und p in nullten Ableitungen vorkommen, folgt dann, daß die Interpolation von w um eine Ordnung höher sein muß als diejenige von p (vgl. hierzu auch HUEBNER [29] und YAMADA et al. [77]). Eine solche Argumentation findet Unterstützung durch die physikalische Verwandtschaft des Druckes mit den im Spannungstensor enthaltenen Normalspannungen, die sich aus ersten Ableitungen des Geschwindigkeitsfeldes herleiten. Gegen beide Begründungen argumentieren jedoch z.B. ZIENKIEWICZ [79], OLSON [46] und OLSON, TUANN [47]. Über eine Eigenwertanalyse des Funktionals in der Variationsformulierung für das lineare STOKES-Problem anhand eines einzelnen Elementes kommen OLSON und TUANN zu dem Schluß, daß die Notwendigkeit der unterschiedlichen Interpolationsordnung für w und p wiederum eine Folge der Sonderrolle des Druckes in inkompressiblen Strömungen ist (s.o. S 41).

Durch die Einführung der Approximationen (2.43) wird mit Rücksicht auf die Voraussetzung $K_H \sim K_M$ eine Beschreibung des BOUSSINESQ-Kontinuums durch die $3N+M$ Freiheitsgrade $v_1, \dots, v_M, \vartheta_1, \dots, \vartheta_M, p_1, \dots, p_M, K_{M,1}, \dots, K_{M,M}$ definiert. Naheliegender wäre nun, aus dem zugrundeliegenden Differentialgleichungssystem (2.3a-c), (2.4) z.B. mit Hilfe der Gewogene-Residuen-Methode $3N+M$ Gleichungen zur simultanen Bestimmung dieser Variablen aufzubauen. Dafür, daß dieser Weg jedoch praktisch in keinem numerischen Lösungsverfahren und auch in der vorliegenden Arbeit nicht beschritten wird, soll hier eine Erklärung gegeben werden: Die für mesoskalige Konvektion über steiler Topographie wesentliche Nichtlinearität des Differentialgleichungssystems wird durch die Trägheitsbeschleunigungen und Temperaturadvektionen konstituiert. Demgegenüber wird die mathematisch weitaus kompliziertere Nichtlinearität über die Parameterisierung der Reibungsbeschleunigung in das Gleichungssystem getragen. Diese verwickelte Variablenkoppelung steht in keinem Verhältnis zur physikalischen Bedeutung der Nichtlinearität des Reibungsterms im Vergleich zu den Trägheitsbeschleunigungen und Temperaturadvektionen. Es wäre deshalb unangemessen, diese Nichtlinearität in einem simultan für alle $3N+M$ Freiheitsgrade zu lösenden Gleichungssystem zu berücksichtigen. Stattdessen wird der advektiven Nichtlinearität einerseits und der Nichtlinearität der Reibungsbeschleunigung andererseits traditionell auf verschiedene Weise Rechnung getragen. Ein simultan zu lösendes nichtlineares Gleichungssystem wird nur für die Freiheitsgrade von Geschwindigkeit, Temperatur und Druck aufgestellt. In diesem System werden die Freiheitsgrade der turbulenten Viskosität als bekannt vorausgesetzt. Aus seinen Lösungen werden dann mit Hilfe der Parameterisierungsansätze (2.4-9) neue Werte für die $K_{M,1}, \dots, K_{M,M}$ bestimmt und in das Gleichungssystem für die $v_1, \dots, v_M, \vartheta_1, \dots, \vartheta_M, p_1, \dots, p_M$ eingesetzt. Hieraus werden wiederum verbesserte Lösungen für die Freiheitsgrade der w -, ϑ - und p -Felder bestimmt usw. Das bedeutet, daß die Freiheitsgrade $v_1, \dots, v_M, \vartheta_1, \dots, \vartheta_M, p_1, \dots, p_M$ einerseits bzw. $K_{M,1}, \dots, K_{M,M}$ andererseits aus separaten Gleichungssystemen und durch wechselseitiges Einsetzen der jeweils letzten verbesserten Lösungen bestimmt werden, bis schließlich ein vorgegebenes Konvergenzkriterium erfüllt wird. Auf diese Weise wird also der Nicht-

linearität von Trägheitsbeschleunigung und Temperaturadvektion in einem *simultanen*, derjenigen der Reibungsbeschleunigung in einem *alternierenden* Lösungsverfahren Rechnung getragen (zu den Prozeduren s. Kap. 4).

Die nach (1.16) und (1.14) aufgebauten Approximationsfunktionen (2.43) enthalten jeweils $\mathcal{N}$ globale Basisfunktionen für $\mathbf{v}$, $\hat{\mathbf{v}}$ und K_M , sowie $\mathcal{M}$ globale Basisfunktionen für p , die gemäß (1.17) über die Elementapproximationen definiert sind. Im *GALERKIN*-Verfahren werden die Residuen gerade zu diesen Basisfunktionen orthogonalisiert (s. S. 6). Zur simultanen Bestimmung der $2\mathcal{N}+\mathcal{M}$ Freiheitsgrade $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\mathcal{N}, \hat{\mathbf{v}}_1, \dots, \hat{\mathbf{v}}_\mathcal{N}, p_1, \dots, p_\mathcal{M}$ müssen $2\mathcal{N}+\mathcal{M}$ Bedingungen nach dem *GALERKIN*-Prinzip aufgestellt werden. Bezüglich der Zuordnung der Gewichtsfunktionen zu den Residuen muß daher eine Auswahl getroffen werden, da eine Orthogonalisierung jedes Residuums zu den insgesamt $\mathcal{N}+\mathcal{M}$ *unabhängigen* in (2.43) auftretenden Basisfunktionen auf $3(\mathcal{N}+\mathcal{M})$ *GALERKIN*-Gleichungen und damit zu einer Überbestimmung führen würde.

In der Literatur wird meist ohne Begründung konstatiert, daß die Orthogonalisierung der Residuen der Bewegungsgleichung und des 1. Hauptsatzes zu den $\mathcal{N}$ Basisfunktionen von $\hat{\mathbf{v}}$ und $\hat{\mathbf{v}}$ sowie des Residuums der Kontinuitätsgleichung zu den $\mathcal{M}$ Basisfunktionen von p gerade auf die richtige Anzahl $2\mathcal{N}+\mathcal{M}$ von Bestimmungsgleichungen führt. Diese Zuordnung wird im Fall der *EULERS*chen Bewegungsgleichung gestützt durch die Rolle des Druckes als *LAGRANGES*cher Parameter der Inkompressibilitätsbedingung. Eine allgemeinere Begründung liefert CHUNG [9], der jedem Residuum die Basisfunktion derjenigen Variablen als Gewichtsfunktion zuordnet, deren inneres Produkt mit dem Residuum eine räumliche Invariante bildet. Dieses Kriterium führt gerade wieder auf die allgemein verwendete Zuordnung.

Mit (2.39, 41, 42) entstehen so aus der Bewegungsgleichung die drei *alternativen* Systeme von jeweils $\mathcal{N}$ *GALERKIN*-Gleichungen:

$$\begin{aligned} F_J = & \int_G N_J \hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}} \, d\mathbf{f} + \int_G \mathbf{k} \times N_J \hat{\mathbf{v}}_h \, d\mathbf{f} + \frac{1}{g_0} \int_G N_J \nabla \hat{p} \, d\mathbf{f} - g \int_G N_J \frac{\hat{\mathbf{v}}}{\theta_0} \, d\mathbf{f} + \\ & + \int_G (\hat{K}_M \nabla N_J \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}} - N_J \nabla \hat{K}_M \cdot \hat{\mathbf{v}} \nabla) \, d\mathbf{f} - \int_G \mathbf{k} \times \mathbf{v}_{h,J} \int_G N_J \, d\mathbf{f} - \\ & - \oint_{\Gamma(G)}^* N_J \hat{q}_1 \, ds = 0 \end{aligned} \quad (2.44.1)$$

$$\begin{aligned} F_J = & \int_G N_J \hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}} \, d\mathbf{f} + \int_G \mathbf{k} \times N_J \hat{\mathbf{v}}_h \, d\mathbf{f} - \frac{1}{g_0} \int_G (\nabla N_J) \hat{p} \, d\mathbf{f} - g \int_G N_J \frac{\hat{\mathbf{v}}}{\theta_0} \, d\mathbf{f} + \\ & + \int_G (\hat{K}_M \nabla N_J \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}} - N_J \nabla \hat{K}_M \cdot \hat{\mathbf{v}} \nabla) \, d\mathbf{f} - \int_G \mathbf{k} \times \mathbf{v}_{h,J} \int_G N_J \, d\mathbf{f} - \\ & - \frac{1}{g_0} \oint_{\Gamma(G)}^* N_J \hat{q}_2 \, ds = 0 \end{aligned} \quad (2.44.2)$$

$$\begin{aligned} F_J = \iint_G N_J \hat{v} \cdot \nabla \hat{v} \, df + f k \times \iint_G N_J \hat{v}_h \, df - \frac{1}{g_0} \iint_G (\nabla N_J) \hat{p} \, df - g k \iint_G N_J \frac{\hat{z}}{\theta_0} \, df + \\ + \iint_G \hat{K}_h \nabla N_J \cdot (\nabla \hat{v} + \hat{v} \nabla) \, df - f k \times v_{h,J} \iint_G N_J \, df - \\ - \frac{1}{g_0} \oint_{\Gamma(G)} \hat{N}_J \hat{q}_J \, ds = 0 \end{aligned} \quad (2.44.3)$$

$J = 1, \dots, \mathcal{N}$

$$(F_J = F_{1,J} \, \hat{i} + F_{2,J} \, \hat{j} + F_{3,J} \, \hat{k})$$

mit Interpolationen $\hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{q}_3$ der natürlichen Randbedingungen für

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{\partial v}{\partial n} \quad , \\ q_2 &= -p_m + g_0 K_h \frac{\partial v}{\partial n} \quad \text{bzw.} \\ q_3 &= -p_m + g_0 K_h \left(\frac{\partial v}{\partial n} + \nabla v_n \right) . \end{aligned}$$

Werden auf Teilen von $\Gamma(G)$ homogene Randbedingungen für q_1, q_2 bzw. q_3 vorgegeben, dann entfallen die Anteile der Randintegrale in (2.44.1, 2 bzw. 3) über diesen Kurvenstücken.

Inhomogene Randbedingungen werden durch Interpolation zwischen den Knotenpunkten auf dem Rand, an denen q_1, q_2 bzw. q_3 vorgegeben werden, approximiert. Die Basisfunktionen N_J der Interpolation sind dann Funktionen der Bogenlänge von Γ und treten als Gewichtsfunktionen auf der Randkurve an die Stelle der $N_J(x, z)$ in den Flächenintegralen.

DER 1. HAUPTSATZ

Nach vorangegangener partieller Integration mit Berücksichtigung von (2.38.1)

$$\iint_G N \nabla \cdot (K_h \nabla \hat{v}) \, df = \oint_{\Gamma(G)} N K_h \frac{\partial \hat{v}}{\partial n} \, ds - \iint_G K_h \nabla N \cdot \nabla \hat{v} \, df$$

wird durch Einführung der Approximationsfunktionen (2.43) das Residuum von (2.3b) gebildet und zu den $\mathcal{N}$ Basisfunktionen $N_1, \dots, N_{\mathcal{N}}$ orthogonalisiert. Das liefert zusätzlich zu (2.44) weitere $\mathcal{N}$ GALERKIN-Gleichungen für die Freiheitsgrade $v_1, \dots, v_{\mathcal{N}}, \hat{v}_1, \dots, \hat{v}_{\mathcal{N}}, p_1, \dots, p_{\mathcal{N}}$

$$\begin{aligned} F_{4,J} = \iint_G N_J \hat{v} \cdot \nabla \hat{v} \, df + \iint_G (\hat{g}_1 - \hat{g}_2) N_J \hat{w} \, df + \iint_G \hat{K}_h \nabla N_J \cdot \nabla \hat{v} \, df - \\ - \oint_{\Gamma(G)} \hat{N}_J \hat{q}_4 \, ds = 0 \end{aligned} \quad (2.45)$$

$J = 1, \dots, \mathcal{N}$

mit der Interpolation $\hat{q}_4$ der natürlichen Randbedingung für

$$q_4 = K_H \frac{\partial \psi}{\partial n}$$

Die Gewichtsfunktionen N_j sind die Basisfunktionen für die Interpolation von $K_H \frac{\partial \psi}{\partial n}$ auf der Randkurve. Auf den Teilen der Randkurve $\Gamma(G)$, auf denen die homogene Randbedingung $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$ vorgeschrieben wird, verschwinden die entsprechenden Anteile des Randintegrals in (2.45).

DIE KONTINUITÄTSGLEICHUNG

Die noch fehlenden $\mathcal{M}$ GALERKIN-Gleichungen werden durch Orthogonalisierung des Residuums der Inkompressibilitätsbedingung (2.3c) zu den $\mathcal{M}$ Basisfunktionen $H_1, \dots, H_{\mathcal{M}}$ der Approximation $\hat{p} = \hat{p}(\varpi, p_1, \dots, p_{\mathcal{M}})$ gebildet:

$$F_{5,L} = \iint_G H_L \nabla \cdot \hat{\psi} \, d\Omega = 0 \quad (2.46)$$

$$L = 1, \dots, \mathcal{M}$$

Wenn nicht eine implizite Drucknormierung über eine der Randbedingungen (2.30) oder (2.31) zustandekommt, dann muß diese explizit an einem internen Knotenpunkt vorgenommen werden. Für den globalen Index dieses Knotenpunktes darf dann die GALERKIN-Gleichung (2.46) nicht gebildet werden, da sonst eine Überbestimmung entsteht.

Mit (2.44), (2.45) und (2.46) steht nun ein vollständiges System von $2\mathcal{N} + \mathcal{M}$ GALERKIN-Gleichungen zur Bestimmung der Freiheitsgrade $v_1, \dots, v_{\mathcal{N}}, \psi_1, \dots, \psi_{\mathcal{N}}, p_1, \dots, p_{\mathcal{M}}$ bereit. Von der Reduktion um die Anzahl der vorgegebenen DIRICHLET-Randbedingungen für v und ψ wird dabei an dieser Stelle noch abgesehen.

3. DIE FINITE - ELEMENTE - DISKRETISIERUNG

3.1 DIE AUSWAHL DES ELEMENTES

Zur räumlichen Diskretisierung beliebiger ein-, zwei- und dreidimensionaler Integrationsgebiete steht sowohl bezüglich der Geometrie als auch der Knotenpunktverteilung eine reiche Auswahl erprobter Elemente zur Verfügung. Ausführliche Diskussionen der verschiedenen Elementtypen und der auf ihnen definierbaren Interpolationsfunktionen findet man z.B. in [41], [59], [29], [71], [79].

Für zweidimensionale Diskretisierungen werden in allen Anwendungsbereichen überwiegend Dreiecks- und Viereckselemente verwendet. Unter den Elementen mit geradlinigen Berandungen zeichnen sich die Dreiecke durch ihre hohe Anpassungsfähigkeit an komplizierte Gebietsberandungen aus. Eine solche läßt sich zwar auch mit schiefwinkligen Viereckselementen erreichen, diese haben aber gegenüber den Dreieckselementen einen Nachteil im Hinblick auf die weiter unten (s. S 61) behandelten lokalen Elementkoordinaten. Die Transformationsbeziehungen zwischen den globalen kartesischen Koordinaten und den lokalen Koordinaten sind für das Dreieck linear, selbst für geradlinig schiefwinklige Vierecke aber schon nicht-linear, was zu verwaltungs- und rechenzeitmäßig spürbar aufwendigeren Algorithmen für die Berechnung der Elementbeiträge zu den GALERKIN - Gleichungen führt.

Ein weiterer Vorteil von Dreieckselementen betrifft die Approximationsfunktionen. Alle der Dreiecksgeometrie angepaßten Knotenpunktbelegungen führen auf Stützstellenzahlen, die gerade identisch sind mit der Zahl der Glieder (und damit Bestimmungsstücke) von vollständigen zweidimensionalen Polynomen. Die 'natürlichen' Polynomapproximationen über dem Dreieck erfüllen also von selbst die an jede Elementapproximationsfunktion zu stellende Forderung nach geometrischer Isotropie (die Approximation sollte nicht von der Orientierung des Koordinatensystems abhängen). Außerdem haben vollständige zweidimensionale Polynome beliebigen Grades die Eigenschaft, sich auf jedem Elementrand auf ein eindimensionales Polynom gleichen Grades der Bogenlänge zu reduzieren. Damit ist immer die notwendige Stetigkeit der globalen Approximationsfunktion über die Elementränder hinweg gesichert. Das ist nicht ohne weiteres erfüllt bei der Familie der Viereckselemente, für die sich bei den der Geometrie angepaßten Knotenpunktbelegungen immer unvollständige Polynome ergeben. Diese müssen dann so angesetzt werden, daß die Invarianz bezüglich Drehungen des Koordinatensystems erfüllt ist (vgl. z.B. SCHWARZ [59]).

Im vorliegenden Modell wurde mit elementweise quadratischen Interpolationen für w, ϑ und K_M bzw. K_H gearbeitet. Für alle räumlichen Diskretisierungen wurde deshalb das 6 - Knoten - Dreieckselement zugrundegelegt, dem seine Eck- und Seitenmittelpunkte als Knotenpunkte zugeordnet sind. Da der Druckverlauf über dem Element durch eine lineare Interpolation approximiert wurde, waren für $\hat{p}$ nur drei Stützstellen erforderlich. Im Gegensatz zu w, ϑ und K_M bzw. K_H

wurden daher Druckfreiheitsgrade nur an den Eckknoten definiert, so daß sich für das 6-Knoten-Dreieckselement die in Abb. 12 eingetragene Zuweisung von Variablen zu Knotenpunkten ergibt.

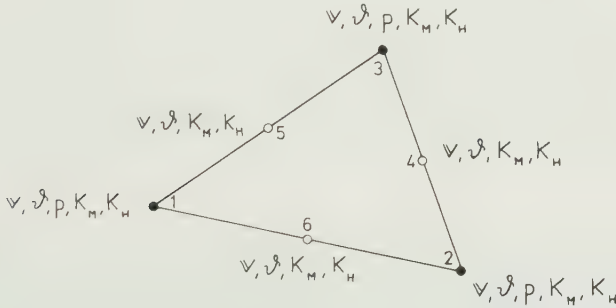


Abb. 12: Das 6-Knoten-Dreieckselement

Die hier vorgenommene lokale Knotenpunktnumerierung ist algorithmisch zweckmäßig, aber willkürlich. Einmal vereinbart, ist sie jedoch für alle folgenden Indizierungen verbindlich.

3.2 ELEMENTEINTEILUNG DER INTEGRATIONSGBIETE UND KNOTENPUNKTVERTEILUNGEN

Den numerischen Simulationen wurden ein Integrationsgebiet mit einer Bergtopographie und eines mit einer Taltopographie zugrundegelegt. Die horizontalen Abmessungen betragen 10 bzw. 8 km, die vertikalen in beiden Fällen 2 km. Die Diskretisierungen der beiden Integrationsgebiete sind in Abb. 13 a und 13 b dargestellt, jeweils oben die Elemententeilung und darunter die daraus resultierende Knotenpunktverteilung. Das Integrationsgebiet der Bergversion ist in 328 Elemente mit insgesamt 709 Knotenpunkten, das der Talversion in 422 Elemente mit 915 Knotenpunkten unterteilt. Mit der gemäß Abb. 12 vereinbarten Variablenbelegung des 6-Knoten-Elementes und mit Rücksicht auf $\mathbf{v} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ sowie die Voraussetzung $K_H \sim K_M$ ergeben sich damit 3736 globale Freiheitsgrade für das Bergmodell und 4822 für das Talmodell. Wegen der im vorigen Abschnitt begründeten separaten Behandlung von K_M gegenüber $\mathbf{v}, \vartheta, p$ bleiben für das Kernstück der algebraischen Lösungsprozedur, nämlich die *simultane* Lösung des nichtlinearen GALERKIN-Gleichungssystems (2.44, 45, 46) für die Freiheitsgrade von $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{\vartheta}$ und $\hat{p}$ 3027 bzw. 3907 Unbekannte.

Beide Diskretisierungen sind durch schrittweise Verfeinerungen aus anfänglich wesentlich größeren Einteilungen hervorgegangen.

ABB.13A : DISKRETISIERUNG DES INTEGRATIONSGBIETES MIT BERGTOPOGRAPHIE

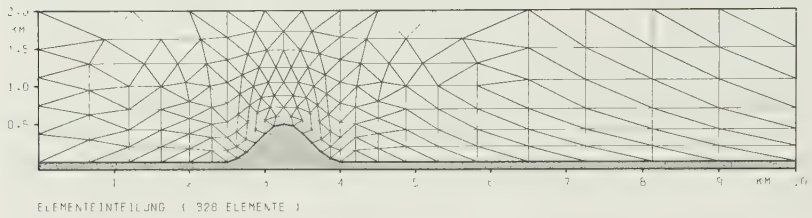
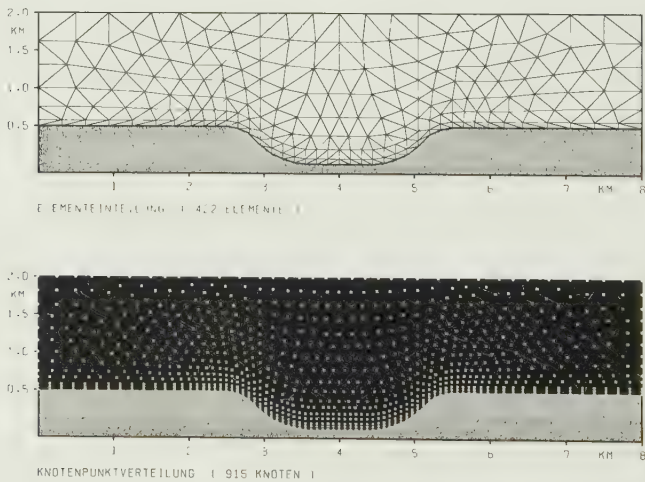


ABB.13B : DISKRETISIERUNG DES INTEGRATIONSGBIETES MIT TALTOPOGRAPHIE



Die ursprünglichen Modelle enthielten jeweils weniger als die Hälfte der Elemente der endgültigen Versionen. Zur Lösung des zu (2.3a-c) gehörigen *linearisierten* Systems reichten diese Einteilungen bereits aus. Bei den Tests des kompletten nichtlinearen Modells traten jedoch selbst bei Vorgabe vertretbarer unterer Grenzen für die berechneten turbulenten Viskositäten Oszillationen auf. Weiter zeigte sich, daß beim Auftreten von Phänomenen, die räumlich im wesentlichen auf den Bereich unterhalb der Gipfelhöhe beschränkt sind, wie Strömungsblockierung im Luv der Anströmung, Grenzschichtablösung mit Rückströmung im Lee sowie Leewellenrotoren, die anfängliche Auflösung in Bodennähe nicht ausreichte. Schließlich erwiesen sich die ursprünglichen Diskretisierungen im Auslaufgebiet als zu grob, denn dort waren die von den Ausströmrandbedingungen verursachten Oszillationen so stark, daß mit den nach (2.4-9) rückkoppelnd berechneten K_M -Feldern überhaupt keine Konvergenz mehr zu erreichen war.

Die Elementverfeinerung wurde schrittweise vorangetrieben, bis die Gradienten aller Variablen so gut aufgelöst wurden, daß für alle realistischen Eingabeparameter keine oder höchstens noch unwesentliche Oszillationen auftraten.

Überzeugt durch die Ausführungen von GRESHO und LEE [23] über die Rolle der im Endeffekt natürlich unerwünschten Oszillationen als Indikatoren für (physikalisch!) unzureichende Auflösung einer gewählten Diskretisierung, wurde in dieser Arbeit konsequent auf jegliche Art von Beruhigungsmaßnahmen auf der Grundlage einer *numerischen* Diffusion verzichtet. Weit verbreitet sind in diesem Zusammenhang "upwind"-Varianten des GALERKIN-Verfahrens (s. z.B. [24], [8]), die ein Analogon zu den Stromaufwärts-Diskretisierungen bei der Differenzenmethode sind. Diese Verfahren ermöglichen zwar oszillationsfreie Lösungen für wesentlich größere Element- bzw. Gittereinteilungen, jedoch sind in solchen Lösungen oft bedeutsame Strömungsphänomene, insbesondere die Stau- und Ablösewirbel, unterdrückt. Im Grenzfall können mit solchen Methoden stabilisierte Lösungen physikalisch völlig bedeutungslos werden, indem sie z.B. überhaupt nicht mehr von der REYNOLDS-Zahl abhängen.

Der Preis für eine Simulation ohne verfälschende numerische Diffusion ist eine deutlich höhere Zahl von Elementen und damit von Freiheitsgraden. Da das in Kap. 4 behandelte Verfahren zur Lösung der sehr großen nichtlinearen algebraischen Gleichungssysteme relativ hohe CPU-Zeiten und dazu noch einmal Input/Output-Zeiten vergleichbarer Größenordnung benötigt (s.u.), mußten auf der anderen Seite überflüssige Feineinteilungen in gradientschwächeren Gebieten vermieden werden.

In der für die meisten Simulationen benutzten Referenzgeometrie der Abbildungen 13a und 13b haben beide Topographien eine maximale Hangneigung von 45°. Für die Experimentreihe zum Einfluß verschiedener Hangneigungen wurden die Geometrien der Integrationsgebiete und damit die Elementdiskretisierungen verändert. Hierzu war es aber nicht nötig, für jede neue Hangneigung eine unabhängige Diskretisierung zu entwickeln. Vielmehr ließ sich die Variation der Hanggeometrie mit automatischer Anpassung der Elemententeilung sehr einfach durch eine geeignete Transformation der x-Koordinaten realisieren. Dazu wurde gefordert, daß sich die Metrik nur in unmittelbarer Hangumgebung wesentlich

ändert, weiter außerhalb jedoch praktisch unverändert bleibt. Das einfachste Modell für eine solche Transformation läßt sich aus der GAUSS-Verteilung ableiten. Geht man in den Ansatz

$$\bar{x} = x + \alpha \exp(-\beta (x - x_m)^2)$$

mit der Forderung ein, daß an der Stelle x_m eine maximale Verzerrung um δx , an einer Nachbarstelle x_v aber nur noch ein Bruchteil $\nu \delta x$ ($\nu \ll 1$) bewirkt werden soll, dann führt das auf die Metriktransformation

$$\bar{x} = x + \delta x \nu^{\left(\frac{x - x_m}{x_v - x_m}\right)^2} \quad : 0 < x < L \quad (3.1)$$

mit den Zusatzforderungen

$$\bar{x}(x=0) = 0, \quad \bar{x}(x=L) = L$$

Die geringfügige nichtlineare Verzerrung der Elementgeometrie ist zwar nicht kompatibel mit der weiter unten (S 62) definierten linearen Elementmetrik, jedoch erweist sich der Fehler als vernachlässigbar.

3.3 ELEMENT - DISKRETISIERUNG DER GALERKIN - GLEICHUNGEN

Nach Spezifikation des Elementes und seiner Variablenbelegung (Abb. 12) können nun die GALERKIN-Gleichungen (2.44), (2.45), (2.46) nach dem in Kap. 1.2 dargelegten Verfahren aus den Elementbeiträgen zusammengesetzt werden. Um die Darstellung dieser Diskretisierung nicht zu überlasten, soll im Fall der Bewegungsgleichung stellvertretend für die drei Varianten (2.44.1-3) nur die im folgenden fast ausschließlich verwendete Form (2.44.3) behandelt werden.

Die analog zu (1.14) angesetzten elementweisen Interpolationen der abhängigen Variablen, aus denen sich die globalen Interpolationen (2.43) gemäß (1.16) zusammensetzen, lauten

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}}^e(\mathbf{r}) &= \sum_{i=1}^n N_i^e(\mathbf{r}) \mathbf{v}_i^e \\ \hat{\Phi}^e(\mathbf{r}) &= \sum_{i=1}^n N_i^e(\mathbf{r}) \Phi_i^e \\ \hat{\mathbf{p}}^e(\mathbf{r}) &= \sum_{t=1}^m H_t^e(\mathbf{r}) \mathbf{p}_t^e \\ \hat{K}_M^e(\mathbf{r}) &= \sum_{i=1}^n N_i^e(\mathbf{r}) K_{M,i}^e \\ \hat{K}_H^e(\mathbf{r}) &= \sum_{i=1}^n N_i^e(\mathbf{r}) K_{H,i}^e \end{aligned} \quad (3.2)$$

mit $n=6$ für die quadratischen $\mathbf{v}$ -, Φ -, K_M - bzw. K_H -Interpolationen

nen und $m=3$ für die lineare Druckinterpolation. In Analogie zu dem Beispiel (1.18) für *eine* abhängige Variable ist die Zusammensetzungsvorschrift für die GALERKIN-Gleichungen (2.44.3), (2.45), (2.46) jetzt

$$\begin{aligned}
 F_J &= F_{1,J} \hat{i} + F_{2,J} \hat{j} + F_{3,J} \hat{k} = \sum_{e=1}^E F_{i^e(J)}^e = \\
 &= \sum_{e=1}^E \left[\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n v_i^e \cdot \iint_{G^e} N_i^e N_k^e \nabla N_k^e df v_k^e + f k \times \sum_{k=1}^n \iint_{G^e} N_i^e N_k^e df v_{h,k}^e - \right. \\
 &- \frac{1}{g_0} \sum_{l=1}^m \iint_{G^e} (\nabla N_i^e) H_l^e df p_l^e - g k \sum_{k=1}^n \iint_{G^e} \frac{1}{\theta_0} N_i^e N_k^e df v_k^e + \\
 &+ \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \iint_{G^e} N_i^e \nabla N_i^e \cdot (\nabla N_k^e v_k^e + v_k^e \nabla N_k^e) df K_{H,i}^e - f k \times v_{h,g} \iint_{G^e} N_i^e df - \\
 &\left. - \frac{1}{g_0} \oint_{\Gamma^e(G^e)} N_i^e \hat{q}_3 ds \right] = 0
 \end{aligned}
 \tag{3.3.1}$$

$$\begin{aligned}
 F_{4,J} &= \sum_{e=1}^E F_{4,i^e(J)}^e = \\
 &= \sum_{e=1}^E \left[\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \iint_{G^e} N_i^e N_k^e \nabla N_k^e df \cdot v_i^e v_k^e + \sum_{k=1}^n \iint_{G^e} (v_i - v_g) N_i^e N_k^e df w_k^e + \right. \\
 &+ \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \iint_{G^e} N_i^e \nabla N_i^e \cdot \nabla N_k^e df K_{H,i}^e v_k^e - \\
 &\left. - \oint_{\Gamma^e(G^e)} N_i^e \hat{q}_4 ds \right] = 0
 \end{aligned}
 \tag{3.3.2}$$

$$F_{5,L} = \sum_{e=1}^E F_{5,l^e(L)}^e = \sum_{e=1}^E \sum_{k=1}^n \iint_{G^e} H_l^e \nabla N_k^e df \cdot v_k^e = 0 \tag{3.3.3}$$

$$J = 1, \dots, \mathcal{M}; \quad L = 1, \dots, \mathcal{M}$$

In (3.3.1-3) ist nur in den jeweils ersten Zeilen die in Kap. 1.2 verabredete Notation $j^e(J)$ zur Zuordnung von lokalem (j) und globalem (J) Index verwendet worden. In der ausführlichen Summenschreibweise ist dann zur Vereinfachung darauf verzichtet worden. Da nämlich die Elementbeiträge systematisch für alle Elemente zunächst ohne Rücksicht darauf berechnet werden, zu welcher globalen *GALEKIN*-Gleichung sie gehören (s. Abb. 3), ist diese aufwendige Notation für das folgende überflüssig. Die Einweisung der Summanden mit elementbezogenem Indexpaar $\{e, j\}$ zu den *GALEKIN*-Gleichungen mit dem jeweils zugehörigen globalen Index J wird bei der Programmausführung mit Hilfe eines Identifikationszeigerfeldes gesteuert.

Das System (3.3.1-3) soll nun in eine computergerechte Matrixschreibweise überführt werden. Hierzu wird die vektorielle *GALEKIN*-Gleichung (3.3.1) gemäß $F_J = F_{1,J} \mathbf{u} + F_{2,J} \mathbf{j} + F_{3,J} \mathbf{k}$ unter Berücksichtigung der Identität

$$\begin{aligned} \iint_{G^e} N_i^e \nabla N_j^e \cdot (\nabla N_k^e v_k^e + v_k^e \nabla N_k^e) d\mathbf{f} = \\ \iint_{G^e} N_i^e \nabla N_j^e \cdot \nabla N_k^e d\mathbf{f} v_k^e + \iint_{G^e} N_i^e \nabla N_k^e \nabla N_j^e d\mathbf{f} \cdot v_k^e \end{aligned}$$

in ihre Komponenten zerlegt. So entsteht mit Verwendung der *Summenkonvention* bezüglich doppelter Indizes aus (3.3) das System

$$\begin{aligned} F_{1,J} &= \sum_{e=1}^E F_{1,J}^e = \\ &= \sum_{e=1}^E \left[(A_{jk}^e (u_i^e, w_i^e) + D X_{jk}^e (K_{M,i}^e)) u_k^e - C_{jk}^e v_k^e + \right. \\ &\quad \left. + D_{jk}^e (K_{M,i}^e) w_k^e - P_{j1}^e P_1^e + b_{1,j}^e \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

$$\begin{aligned} F_{2,J} &= \sum_{e=1}^E F_{2,J}^e = \\ &= \sum_{e=1}^E \left[C_{jk}^e u_k^e + (A_{jk}^e (u_i^e, w_i^e) + D Y_{jk}^e (K_{M,i}^e)) v_k^e + b_{2,j}^e \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

$$\begin{aligned} F_{3,J} &= \sum_{e=1}^E F_{3,J}^e = \\ &= \sum_{e=1}^E \left[D_{kj}^e (K_{M,i}^e) u_k^e + (A_{jk}^e (u_i^e, w_i^e) + D Z_{jk}^e (K_{M,i}^e)) w_k^e - \right. \\ &\quad \left. - B_{jk}^e v_k^e - Q_{j1}^e P_1^e + b_{3,j}^e \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

$$\begin{aligned}
 F_{4,J} &= \sum_{e=1}^E F_{4,J}^e = \\
 &= \sum_{e=1}^E \left[V_{jk}^e w_k^e + \left(A_{jk}^e (u_i^e, w_i^e) + T_{jk}^e (K_{H,i}^e) \right) v_k^e + b_{4,j}^e \right] = 0
 \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

$$F_{5,L} = \sum_{e=1}^E F_{5,L}^e = \sum_{e=1}^E \left[U_{lk}^e u_k^e + W_{lk}^e w_k^e \right] = 0 \tag{3.4.5}$$

$$J = 1, \dots, \mathcal{M}, \quad L = 1, \dots, \mathcal{M}$$

mit

$$A_{jk}^e (u_i^e, w_i^e) = \alpha_{ijk}^e u_i^e + \beta_{ijk}^e w_i^e \tag{3.5.1}$$

$$\alpha_{ijk}^e = \iint_{G^e} N_i^e N_j^e \frac{\partial N_k^e}{\partial x} d\mathbf{f} \tag{3.5.1a}$$

$$\beta_{ijk}^e = \iint_{G^e} N_i^e N_j^e \frac{\partial N_k^e}{\partial z} d\mathbf{f} \tag{3.5.1b}$$

$$DX_{jk}^e (K_{M,i}^e) = \pi_{ijk}^e K_{M,i}^e \tag{3.5.2}$$

$$\pi_{ijk}^e = \iint_{G^e} N_i^e \left(2 \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_k^e}{\partial x} + \frac{\partial N_j^e}{\partial z} \frac{\partial N_k^e}{\partial z} \right) d\mathbf{f} \tag{3.5.2a}$$

$$DY_{jk}^e (K_{M,i}^e) = \tau_{ijk}^e K_{M,i}^e \tag{3.5.3}$$

$$\tau_{ijk}^e = \iint_{G^e} N_i^e \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_k^e}{\partial x} + \frac{\partial N_j^e}{\partial z} \frac{\partial N_k^e}{\partial z} \right) d\mathbf{f} \tag{3.5.3a}$$

$$DZ_{jk}^e (K_{M,i}^e) = \sigma_{ijk}^e K_{M,i}^e \tag{3.5.4}$$

$$\sigma_{ijk}^e = \iint_{G^e} N_i^e \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_k^e}{\partial x} + 2 \frac{\partial N_j^e}{\partial z} \frac{\partial N_k^e}{\partial z} \right) d\mathbf{f} \tag{3.5.4a}$$

$$D_{jk}^e (K_{H,i}^e) = g_{ijk}^e K_{H,i}^e \quad (3.5.5)$$

$$g_{ijk}^e = \iint_{G^e} N_i^e \frac{\partial N_j^e}{\partial z} \frac{\partial N_k^e}{\partial x} df \quad (3.5.5a)$$

$$C_{jk}^e = \int \iint_{G^e} N_j^e N_k^e df \quad (3.5.6)$$

$$P_{jl}^e = \frac{1}{g_0} \iint_{G^e} \frac{\partial N_l^e}{\partial x} H_l^e df \quad (3.5.7)$$

$$Q_{jl}^e = \frac{1}{g_0} \iint_{G^e} \frac{\partial N_l^e}{\partial z} H_l^e df \quad (3.5.8)$$

$$B_{jk}^e = g \iint_{G^e} \frac{1}{\theta_0} N_j^e N_k^e df \quad (3.5.9)$$

$$V_{jk}^e = \iint_{G^e} (\gamma_i - \gamma_j) N_j^e N_k^e df \quad (3.5.10)$$

$$T_{jk}^e (K_{H,i}^e) = \tau_{ijk}^e K_{H,i}^e \quad (3.5.11)$$

$$(\tau_{ijk}^e \text{ s. (3.5.3a)})$$

$$U_{lk}^e = \iint_{G^e} H_l^e \frac{\partial N_k^e}{\partial x} df \quad (3.5.12)$$

$$W_{lk}^e = \iint_{G^e} H_l^e \frac{\partial N_k^e}{\partial z} df \quad (3.5.13)$$

$$b_{1,i}^e = SX_i^e - \frac{1}{g_0} \oint_{\Gamma^e(G^e)} \hat{N}_i^e \hat{i} \cdot \hat{q}_3^e ds \quad (3.5.14)$$

$$b_{2,i}^e = -SY_i^e - \frac{1}{g_0} \oint_{\Gamma^e(G^e)} \hat{N}_i^e \hat{j} \cdot \hat{q}_3^e ds \quad (3.5.15)$$

$$b_{3,i}^e = - \frac{1}{g_0} \oint_{\Gamma^e(G^e)} \hat{N}_i^e \hat{k} \cdot \hat{q}_3^e ds \quad (3.5.16)$$

$$b_{4,i}^e = - \oint_{\Gamma^e(G^e)} \hat{N}_i^e \hat{q}_4^e ds \quad (3.5.17)$$

$$SX_i^e = \int \gamma_i \iint_{G^e} N_i^e df \quad (3.5.18)$$

$$SY_i^e = \int \gamma_i \iint_{G^e} N_i^e df \quad (3.5.19)$$

Darin sind $\hat{q}_3^e$ und $\hat{q}_4^e$ die Interpolationen von $-p_n + q_0 K_H \left(\frac{\partial v}{\partial n} + \nabla v_n \right)$ bzw. $K_H \frac{\partial v}{\partial n}$ auf dem Elementrand $\Gamma^e(G^e)$.

Anhand der Matrixschreibweise für die Elementbeiträge zu den GALERKIN-Gleichungen, d.h. für die Summanden in (3.4.1-5)

$$\begin{pmatrix} F_{1,i}^e \\ F_{2,i}^e \\ F_{3,i}^e \\ F_{4,i}^e \\ F_{5,i}^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{ik}^e + DX_{ik}^e & -C_{ik}^e & D_{ik}^e & 0 & -P_{il}^e \\ C_{ik}^e & A_{ik}^e + DY_{ik}^e & 0 & 0 & 0 \\ D_{ki}^e & 0 & A_{ik}^e + DZ_{ik}^e & -B_{ik}^e & -Q_{il}^e \\ 0 & 0 & V_{ik}^e & A_{ik}^e + T_{ik}^e & 0 \\ U_{lk}^e & 0 & W_{lk}^e & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k^e \\ v_k^e \\ w_k^e \\ \vartheta_k^e \\ p_l^e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,i}^e \\ b_{2,i}^e \\ b_{3,i}^e \\ b_{4,i}^e \\ 0 \end{pmatrix}$$

(3.6)

bzw. symbolisch

$$F^e = M^e(\Psi^e) \Psi^e + b^e \quad (3.6)'$$

sollen einige *Begriffsbezeichnungen* verabredet werden. Im 27-komponentigen Vektor F^e sind alle aus dem Element "e" stammenden Beiträge zu den globalen GALERKIN-Gleichungen zusammengefaßt. Die 27×27 -Matrix M^e heißt "*Elementmatrix*" und setzt sich aus den ("*konstituierenden*") Untermatrizen $A_{ik}^e, DX_{ik}^e, \dots$ zusammen. Ψ^e ist der *Variablenvektor*, der die 27 Elementfreiheitsgrade $u_1^e, \dots, u_6^e, v_1^e, \dots, v_6^e, w_1^e, \dots, w_6^e, \vartheta_1^e, \dots, \vartheta_6^e, p_1^e, \dots, p_3^e$ enthält. In Anlehnung an die ursprünglich aus der Baustatik stammende Bezeichnung "Lastvektor" soll b^e "*Kraftvektor*" genannt werden. Er enthält sämtliche von den Randbedingungen und den äußeren Kräften (hier die aufgeprägte Druckkraft $f k \times v_{h,g} = -\frac{1}{q_0} \nabla_h p_0$) stammenden Elementbeiträge zu den inhomogenen Termen der GALERKIN-Gleichungen.

Bezüglich der Matrixbeiträge aus den Druckbeschleunigungstermen und der Inkompressibilitätsbedingung gilt nach (3.5.7,8) bzw. (3.5.12,13):

$$U_{lk}^e = g_o P_{kl}^e \quad (3.7.1)$$

$$W_{lk}^e = g_o Q_{kl}^e \quad (3.7.2)$$

d.h. U_{lk}^e und W_{lk}^e brauchen nicht gesondert berechnet zu werden, sondern sind bis auf einen konstanten Faktor die Transponierten von P_{jk}^e und Q_{jk}^e . In der auf die Ausströmrandsbedingung (2.31) zugeschnittenen Variante (2.44.2) der zur Bewegungsgleichung gehörigen GALERKIN-Gleichung treten die konstituierenden Matrizen DX_{jk}^e , DY_{jk}^e , DZ_{jk}^e und D_{jk}^e nicht auf. An die Stelle von DX_{jk}^e , DY_{jk}^e und DZ_{jk}^e tritt dann eine Matrix, die sich wegen der vorausgesetzten Proportionalität von K_M und K_M nur um einen konstanten Faktor von der Matrix T_{jk}^e unterscheidet.

Die Elementmatrix M^e enthüllt den Ursprung für die algorithmisch sehr nachteilige Asymmetrie der großen Matrizen, die bei der Lösung des nichtlinearen GALERKIN-Gleichungssystems auftreten. Als Erzeuger der Asymmetrie von M^e , die sich beim Zusammenfügen der Elementbeiträge zum Gesamtgleichungssystem auf die globale Matrix überträgt, erweisen sich die Trägheitsbeschleunigungen einschließlich der CORIOLIS-Beschleunigung, die Temperaturadvektion, diabatische Schichtungen im Grundzustand und die durch den Auftriebstern vermittelte Koppelung des Impulsfeldes mit dem Temperaturfeld. Im Fall der nichtlinearen Impuls- und Temperaturadvektionen ist gemäß (3.5.1) bereits die konstituierende "Advektionsmatrix" $A_{jk}^e(u_i^e, w_i^e)$ asymmetrisch. Die "Buoyancy-Untermatrix" B_{jk}^e und die nur bei nicht-neutraler Schichtung des Grundzustandes anwesende Untermatrix V_{jk}^e sind zwar symmetrisch, erzeugen aber eine asymmetrische Blockbildung in M^e , die durch Umordnung von Zeilen und Spalten nicht zu beheben ist.

Eine zusätzliche Quelle für Asymmetrie tritt in der auf die Ausströmrandsbedingung $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}(L, z) = 0$ zugeschnittenen Variante 1 der GALERKIN-Gleichung (2.44) auf, denn die konstituierenden "Druckmatrizen" sind dann von der Gestalt $P_{jk}^e = \frac{1}{\rho_o} \iint_{\Omega^e} N_j^e \frac{\partial H_i^e}{\partial x} df$ bzw. $Q_{jk}^e = \frac{1}{\rho_o} \iint_{\Omega^e} N_j^e \frac{\partial H_i^e}{\partial z} df$ und damit nicht mehr die Transponierten zu U_{lk}^e / ρ_o bzw. W_{lk}^e / ρ_o .

Die in $b_{1,j}^e$, $b_{2,j}^e$, $b_{3,j}^e$ und $b_{4,j}^e$ auftretenden Linienintegrale müssen nur im Fall inhomogener Randbedingungen für q und $\partial \psi / \partial n$ berechnet werden. Entlang sämtlicher im Inneren des Gesamtgebietes G liegenden Elementberandungen werden diese Integrale als Beiträge von jeweils benachbarten Elementen paarweise mit entgegengesetzter Orientierung gebildet. Für die wahren Lösungen v, ψ, p, K_M würden sich diese internen Beiträge also exakt wegheben. Da zwar die Approximationen $\hat{w}^e, \hat{\psi}^e, \hat{p}^e, \hat{K}_M^e$ selbst, nicht aber ihre Normalableitungen bezüglich der Elementränder stetig sind, gilt dies nicht mehr exakt für die approximierten Randintegrale. Da gefordert werden muß, daß im Grenzfall verschwindender Elementgröße die stückweise zusammengesetzten Approximationsfunktionen gegen die wahren Lösungen konvergieren, werden die Diskretisations-Fehlerbeiträge auf den internen Elementberandungen unterdrückt. Auf denjenigen Elementrandstücken, die dem Rand des Gesamtgebietes G angehören, werden bei Vorgabe von DIRICHLET-

Randbedingungen die Randintegrale überhaupt nicht gebildet, weil für die globalen Indizes der *DIRICHLET*-Randpunkte keine *GALERKIN*-Gleichungen aufgestellt werden (vgl. Kap. 1.2). Formal treten zwar auch in den *GALERKIN*-Gleichungen für globale Indizes von Knotenpunkten der Randelemente innerhalb von G die Randintegrale auf, diese verschwinden aber sämtlich wegen der Eigenschaft (1.15) der Interpolations-Basisfunktionen N_i^e bzw. H_i^e . Bei differentiellen oder gemischten Randbedingungen müssen die *GALERKIN*-Gleichungen für Indizes von Randpunkten zwar gebildet werden, doch für die homogenen Randbedingungen $q=0$, $\partial\psi/\partial n=0$ verschwinden gemäß (3.5.14-17) auch hier wieder die Randintegrale.

Insgesamt treten also nichtverschwindende Randintegrale im Vektor b_j überhaupt nur dann auf, wenn *inhomogene* Randbedingungen vom differentiellen oder gemischten Typ vorgegeben sind. Für die hier verwendeten homogenen Randbedingungen (2.25), (2.30), (2.31), (2.36) taucht dagegen das Problem der Berechnung von Randintegralen niemals auf.

3.4 LOKALE ELEMENTKOORDINATEN UND BASISFUNKTIONEN

Zur Aufstellung der Element-Beitragsmatrix M^e müssen alle in den konstituierenden Matrizen (3.5.1-13) und den Anteilen (3.5.18,19) des Kraftvektors auftretenden Flächenintegrale berechnet werden. Unabhängig vom gewählten Verfahren könnten diese Integrationen im globalen kartesischen Koordinatensystem durchgeführt werden. Das wäre aber offensichtlich sehr aufwendig, weil die Integrale sowohl über die Fläche des Integrationsgebietes als auch über die Funktionen N_i^e bzw. H_i^e (die als Basisfunktionen einer Interpolation in jedem Fall die Knotenpunktkoordinaten enthalten) von der Elementgeometrie abhängen. D.h. bezüglich des kartesischen Koordinatensystems müßten alle Integrale in (3.5.1-19) für jedes Element neu berechnet werden.

Dieser Aufwand läßt sich für fast alle konstituierenden Untermatrizen von M^e erheblich verringern durch Einführung eines elementgebundenen lokalen Koordinatensystems. Alle Integrale, in denen keine ortsabhängigen Koeffizienten auftreten, lassen sich dann nämlich in dem Sinne normieren, daß sie stellvertretend für alle Elemente nur ein einziges Mal berechnet zu werden brauchen. Lediglich die Integrale mit koordinatenabhängigen Koeffizienten wie z.B. $\theta_0(z)$ bei nicht-neutraler bzw. $\partial\theta_0/\partial z$ bei inhomogener Schichtungsstabilität müssen für jedes Element gesondert berechnet werden.

Die lokalen Elementkoordinaten ξ, η werden in Bezug auf einen Eckknotenpunkt so definiert, daß die von diesem Punkt ausgehenden Dreiecksseiten zu Koordinatenlinien $\xi=0$ und $\eta=0$ werden.

Das $\{\xi, \eta\}$ -System ist also *schiefwinklig*, soll aber wie das $\{x, z\}$ -System *geradlinig* bleiben. Die Transformation $\{x, z\} \leftrightarrow \{\xi, \eta\}$ muß daher linear sein, d.h. von der Form

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 \xi + a_2 \eta \\ z &= b_0 + b_1 \xi + b_2 \eta \end{aligned} \quad (3.8)$$

Die Festlegung der Lage der Koordinatenlinien sowie der Metrik des lokalen Koordinatensystems erfolgt über die Normierungsbedingungen

$$\begin{aligned} P_1^e(x_1^e, z_1^e) &\longrightarrow P(\xi=1, \eta=0) \\ P_2^e(x_2^e, z_2^e) &\longrightarrow P(\xi=0, \eta=1) \\ P_3^e(x_3^e, z_3^e) &\longrightarrow P(\xi=0, \eta=0) \end{aligned} \quad (3.9)$$

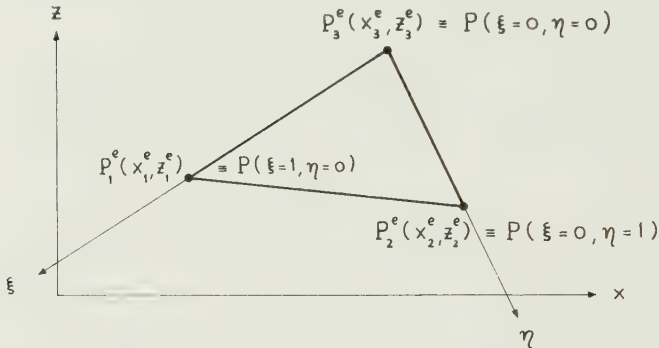


Abb. 14: Die lokalen Elementkoordinaten $\{\xi, \eta\}$

Mit (3.9) werden die Transformationskoeffizienten in (3.8) festgelegt und die lineare Transformation, die jedes im $\{x, z\}$ -System definierte Element beliebiger Lage und Geometrie auf das Einheitsdreieck im $\{\xi, \eta\}$ -System abbildet, heißt

$$\begin{aligned} x &= x_3^e + (x_1^e - x_3^e) \xi + (x_2^e - x_3^e) \eta \\ z &= z_3^e + (z_1^e - z_3^e) \xi + (z_2^e - z_3^e) \eta \end{aligned} \quad (3.10)$$

mit der Umkehrtransformation

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{J^e} \left[(x_2^e z_3^e - x_3^e z_2^e) + (z_2^e - z_3^e) x + (x_3^e - x_2^e) z \right] \\ \eta &= \frac{1}{J^e} \left[(x_3^e z_1^e - x_1^e z_3^e) + (z_3^e - z_1^e) x + (x_1^e - x_3^e) z \right] \end{aligned} \quad (3.10)^{-1}$$

$$\begin{aligned} J^e &= -j \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} \times \frac{\partial x}{\partial \eta} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \\ &= (x_1^e - x_3^e)(z_2^e - z_3^e) - (x_2^e - x_3^e)(z_1^e - z_3^e) \end{aligned} \quad (3.11)$$

ist die JACOBI-Determinante der Transformation, deren Wert identisch

ist mit dem doppelten Flächeninhalt des Elementes. Für die Beziehungen zwischen den partiellen Ableitungen nach den Koordinaten des $\{x, z\}$ - und des $\{\xi, \eta\}$ - Systems gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ &= \frac{1}{J^e} (z_2^e - z_3^e) \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{J^e} (z_3^e - z_1^e) \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ &= \frac{1}{J^e} (x_3^e - x_2^e) \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{J^e} (x_1^e - x_3^e) \frac{\partial}{\partial \eta}\end{aligned}\quad (3.12)$$

Das skalare Flächenelement df^e ist definiert als $df^e = -\mathbf{j} \cdot d\mathbf{r}_\xi \times d\mathbf{r}_\eta = -\mathbf{j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} d\xi d\eta$, d.h.

$$df^e = J^e d\xi d\eta \quad (3.13)$$

Für das Element-Flächenintegral über eine beliebige Funktion $\psi(x, z)$ gilt dann

$$\iint_{G^e} \psi(x, z) df^e = J^e \int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=0}^{1-\xi} \psi(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3.14)$$

Die Approximationsfunktionen über dem Element werden angesetzt als vollständige Polynome 2. Grades in ξ und η für $\hat{u}^e, \hat{v}^e, \hat{w}^e, \hat{\vartheta}^e, \hat{K}_M^e$ bzw. 1. Grades für $\hat{p}^e$

$$\left. \begin{aligned} \hat{u}^e \\ \hat{v}^e \\ \hat{w}^e \\ \hat{\vartheta}^e \\ \hat{K}_M^e \end{aligned} \right\} = a_0 + a_1 \xi + a_2 \eta + a_3 \xi \eta + a_4 \xi^2 + a_5 \eta^2 \quad (3.15)$$

$$\hat{p}^e = b_0 + b_1 \xi + b_2 \eta$$

Aus den Interpolationsforderungen

$$\begin{pmatrix} \hat{u}^e \\ \hat{v}^e \\ \hat{w}^e \\ \hat{\vartheta}^e \\ \hat{K}_M^e \end{pmatrix} (\xi_i, \eta_i) = \begin{pmatrix} u_i^e \\ v_i^e \\ w_i^e \\ \vartheta_i^e \\ K_{M,i}^e \end{pmatrix} \quad ; \quad i = 1, \dots, 6$$

$$\hat{p}^e (\xi_i, \eta_i) = p_i^e \quad ; \quad i = 1, 2, 3$$

werden die Polynomkoeffizienten als Funktionen der lokalen Knotenpunktkoordinaten und der Elementfreiheitsgrade bestimmt und in (3.15)

eingesetzt. Umordnen nach den Freiheitsgraden führt dann auf die Interpolationsfunktionen

$$\begin{pmatrix} \hat{u}^e \\ \hat{v}^e \\ \hat{w}^e \\ \hat{\phi}^e \\ \hat{K}_M^e \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^6 N_i(\xi, \eta) \begin{pmatrix} u_i^e \\ v_i^e \\ w_i^e \\ \phi_i^e \\ K_{M,i}^e \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

$$\hat{p}^e = \sum_{l=1}^3 H_l(\xi, \eta) p_l^e$$

mit den (für alle Elemente gleichen !) Basisfunktionen

$$\begin{aligned} N_1 &= 2\xi^2 - \xi \\ N_2 &= 2\eta^2 - \eta \\ N_3 &= 2\xi^2 + 2\eta^2 + 4\xi\eta - 3\xi - 3\eta + 1 \\ N_4 &= -4\eta^2 - 4\xi\eta + 4\eta \\ N_5 &= -4\xi^2 - 4\xi\eta + 4\xi \\ N_6 &= 4\xi\eta \\ H_1 &= \xi \\ H_2 &= \eta \\ H_3 &= 1 - \xi - \eta \end{aligned} \quad (3.17)$$

3.5 DIE ELEMENTBEITRÄGE IM LOKALEN KOORDINATENSYSTEM

Gleichzeitig mit der Transformation in das lokale Element-Koordinatensystem $\{\xi, \eta\}$ soll jetzt dem Differentialgleichungssystem (2.13) entsprechend zur dimensionslosen Form des diskretisierten GALERKIN-Gleichungssystems übergegangen werden. Dazu werden wieder die Skalierungen (2.11), (2.12) und die auf S 29 definierten Parametergruppen **Ro, Re, Gr, Pr, ε** eingeführt.

Vereinbarung zur Nomenklatur: Wie beim Übergang von (2.3) zu (2.13) sollen auch jetzt wieder unmittelbar nach Einführung der Skalierung die Striche zur Bezeichnung der dimensionslosen Variablen weggelassen werden. Verwechslungen mit den entsprechenden dimensionsbehafteten unabhängigen und abhängigen Variablen sind wegen des Auftretens der dimensionslosen Parametergruppen ausgeschlossen.

An die Stelle der GALERKIN-Gleichungen (3.4.1-5) und die Matrixbeiträge (3.6) treten unter Berücksichtigung von (3.7.1,2) nun die Formulierungen

DAS DIMENSIONSLOSE GALERKIN - GLEICHUNGSSYSTEM

$$\begin{aligned} F_{1,j} &= \sum_{e=1}^E F_{e+1,1,j}^e - \sum_{e=1}^E F_{e+1,2,j}^e = \sum_{e=1}^E \left[\left(A_{jk}^e(u_i^e, w_i^e) + \frac{1}{\epsilon \text{Re}} DX_{jk}^e(K_{n,i}^e) \right) u_k^e - \frac{1}{\epsilon \text{Re}} C_{jk,k}^e + \frac{\epsilon}{\text{Re}} D_{jk}^e(K_{n,i}^e) w_k^e - P_{jk}^e p_k^e + b_{1,j}^e \right] = 0 \\ F_{2,j} &= \sum_{e=1}^E F_{e+1,2,j}^e = \sum_{e=1}^E \left[\frac{1}{\epsilon \text{Re}} C_{jk,k}^e + \left(A_{jk}^e(u_i^e, w_i^e) + \frac{1}{\epsilon \text{Re}} DY_{jk}^e(K_{n,i}^e) \right) v_k^e + b_{2,j}^e \right] = 0 \\ F_{3,j} &= \sum_{e=1}^E F_{e+1,3,j}^e = \sum_{e=1}^E \left[\frac{1}{\epsilon \text{Re}} D_{kj}^e(K_{n,i}^e) u_k^e + \left(A_{jk}^e(u_i^e, w_i^e) + \frac{1}{\epsilon \text{Re}} DZ_{jk}^e(K_{n,i}^e) \right) w_k^e - \frac{\text{Gr}}{\epsilon^2 \text{Re}^2} B_{jk}^e \vartheta_k^e - \frac{1}{\epsilon^2} Q_{jk}^e p_k^e + b_{3,j}^e \right] = 0 \\ F_{4,j} &= \sum_{e=1}^E F_{e+1,4,j}^e = \sum_{e=1}^E \left[V_{jk}^e w_k^e + \left(A_{jk}^e(u_i^e, w_i^e) + \frac{1}{\epsilon \text{PrRe}} T_{jk}^e(K_{n,i}^e) \right) \vartheta_k^e + b_{4,j}^e \right] = 0 \\ F_{5,L} &= \sum_{e=1}^E F_{e+1,5,L}^e = \sum_{e=1}^E \left[P_{Lk}^e u_k^e + Q_{Lk}^e w_k^e \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

$j = 1, \dots, \mathcal{M}; \quad L = 1, \dots, \mathcal{M}$

ELEMENTBEITRÄGE IN MATRIXFORM

$$\begin{pmatrix} F_{1,j}^e \\ F_{2,j}^e \\ F_{3,j}^e \\ F_{4,j}^e \\ F_{5,L}^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{jk}^e(u_i^e, w_i^e) \frac{1}{\epsilon \text{Re}} DX_{jk}^e(K_{n,i}^e) & -\frac{1}{\epsilon \text{Re}} C_{jk}^e & \frac{\epsilon}{\text{Re}} D_{jk}^e(K_{n,i}^e) & 0 & -P_{jk}^e \\ \frac{1}{\epsilon \text{Re}} C_{jk}^e & A_{jk}^e(u_i^e, w_i^e) \frac{1}{\epsilon \text{Re}} DY_{jk}^e(K_{n,i}^e) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\epsilon \text{Re}} D_{kj}^e(K_{n,i}^e) & 0 & A_{jk}^e(u_i^e, w_i^e) \frac{1}{\epsilon \text{Re}} DZ_{jk}^e(K_{n,i}^e) & -\frac{\text{Gr}}{\epsilon^2 \text{Re}^2} B_{jk}^e & -\frac{1}{\epsilon^2} Q_{jk}^e \\ 0 & 0 & V_{jk}^e & A_{jk}^e(u_i^e, w_i^e) \frac{1}{\epsilon \text{PrRe}} T_{jk}^e(K_{n,i}^e) & 0 \\ P_{Lk}^e & 0 & Q_{Lk}^e & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,j}^e \\ b_{2,j}^e \\ b_{3,j}^e \\ b_{4,j}^e \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_k^e \\ v_k^e \\ w_k^e \\ \vartheta_k^e \\ p_k^e \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Mit der abkürzenden Schreibweise

$$\iint_{\xi\eta} (...) d\xi d\eta \quad \text{für} \quad \int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=0}^{1-\xi} (...) d\xi d\eta$$

ergeben sich für die konstituierenden Untermatrizen und die Beiträge zum Vektor der rechten Seiten in (3.18) bzw. (3.19) unter Beachtung von (3.12-14) entsprechend (3.5.1-19) die folgenden Darstellungen:

$$A_{ijk}^e (U_i^e, w_i^e) = \alpha_{ijk}^e U_i^e + \beta_{ijk}^e w_i^e \quad (3.20.1)$$

$$\alpha_{ijk}^e = \mathcal{J}^e \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{\xi\eta} \iint N_i N_j \frac{\partial N_k}{\partial \xi} d\xi d\eta + \mathcal{J}^e \frac{\partial \eta}{\partial x} \Big|_{\xi\eta} \iint N_i N_j \frac{\partial N_k}{\partial \eta} d\xi d\eta \quad (3.20.1a)$$

$$\beta_{ijk}^e = \mathcal{J}^e \frac{\partial \xi}{\partial z} \Big|_{\xi\eta} \iint N_i N_j \frac{\partial N_k}{\partial \xi} d\xi d\eta + \mathcal{J}^e \frac{\partial \eta}{\partial z} \Big|_{\xi\eta} \iint N_i N_j \frac{\partial N_k}{\partial \eta} d\xi d\eta \quad (3.20.1b)$$

$$DX_{jk}^e (K_{m,i}^e) = \pi_{ijk}^e K_{m,i}^e \quad (3.20.2)$$

$$\begin{aligned} \pi_{ijk}^e = & \mathcal{J}^e \left[2\epsilon^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{\xi\eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \Big|_{\xi\eta} \right)^2 \right] \iint N_i \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \frac{\partial N_k}{\partial \xi} d\xi d\eta \\ & + \mathcal{J}^e \left[2\epsilon^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{\xi\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \Big|_{\xi\eta} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \Big|_{\xi\eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} \Big|_{\xi\eta} \right] \iint N_i \left(\frac{\partial N_j}{\partial \xi} \frac{\partial N_k}{\partial \eta} + \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \right) d\xi d\eta \\ & + \mathcal{J}^e \left[2\epsilon^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \Big|_{\xi\eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \Big|_{\xi\eta} \right)^2 \right] \iint N_i \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \frac{\partial N_k}{\partial \eta} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (3.20.2a)$$

$$DY_{jk}^e (K_{m,i}^e) = \tau_{ijk}^e K_{m,i}^e \quad (3.20.3)$$

$$\begin{aligned} \tau_{ijk}^e = & \mathcal{J}^e \left[\epsilon^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{\xi\eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \Big|_{\xi\eta} \right)^2 \right] \iint N_i \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \frac{\partial N_k}{\partial \xi} d\xi d\eta \\ & + \mathcal{J}^e \left[\epsilon^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{\xi\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \Big|_{\xi\eta} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \Big|_{\xi\eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} \Big|_{\xi\eta} \right] \iint N_i \left(\frac{\partial N_j}{\partial \xi} \frac{\partial N_k}{\partial \eta} + \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \right) d\xi d\eta \\ & + \mathcal{J}^e \left[\epsilon^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \Big|_{\xi\eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \Big|_{\xi\eta} \right)^2 \right] \iint N_i \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \frac{\partial N_k}{\partial \eta} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (3.20.3a)$$

$$DZ_{jk}^e (K_{M,i}^e) = \sigma_{ijk}^e K_{M,i}^e \quad (3.20.4)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ijk}^e = & \mathcal{I}^e \left[\epsilon^2 \left(\frac{\partial \xi|^e}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \xi|^e}{\partial z} \right)^2 \right] \iint_{\xi\eta} N_i \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \frac{\partial N_k}{\partial \xi} d\xi d\eta \\ & + \mathcal{I}^e \left[\epsilon^2 \frac{\partial \xi|^e}{\partial x} \frac{\partial \eta|^e}{\partial x} + 2 \frac{\partial \xi|^e}{\partial z} \frac{\partial \eta|^e}{\partial z} \right] \iint_{\xi\eta} N_i \left(\frac{\partial N_j}{\partial \xi} \frac{\partial N_k}{\partial \eta} + \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \right) d\xi d\eta \\ & + \mathcal{I}^e \left[\epsilon^2 \left(\frac{\partial \eta|^e}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \eta|^e}{\partial z} \right)^2 \right] \iint_{\xi\eta} N_i \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \frac{\partial N_k}{\partial \eta} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (3.20.4a)$$

$$D_{jk}^e (K_{M,i}^e) = g_{ijk}^e K_{M,i}^e \quad (3.20.5)$$

$$\begin{aligned} g_{ijk}^e = & \mathcal{I}^e \frac{\partial \xi|^e}{\partial x} \frac{\partial \xi|^e}{\partial z} \iint_{\xi\eta} N_i \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \frac{\partial N_k}{\partial \xi} d\xi d\eta + \mathcal{I}^e \frac{\partial \xi|^e}{\partial z} \frac{\partial \eta|^e}{\partial x} \iint_{\xi\eta} N_i \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \frac{\partial N_k}{\partial \eta} d\xi d\eta \\ & + \mathcal{I}^e \frac{\partial \xi|^e}{\partial x} \frac{\partial \eta|^e}{\partial z} \iint_{\xi\eta} N_i \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \frac{\partial N_k}{\partial \xi} d\xi d\eta + \mathcal{I}^e \frac{\partial \eta|^e}{\partial x} \frac{\partial \eta|^e}{\partial z} \iint_{\xi\eta} N_i \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \frac{\partial N_k}{\partial \eta} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (3.20.5a)$$

$$C_{jk}^e = \mathcal{I}^e \iint_{\xi\eta} N_i N_k d\xi d\eta \quad (3.20.6)$$

$$P_{jl}^e = \mathcal{I}^e \frac{\partial \xi|^e}{\partial x} \iint_{\xi\eta} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} H_l d\xi d\eta + \mathcal{I}^e \frac{\partial \eta|^e}{\partial x} \iint_{\xi\eta} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} H_l d\xi d\eta \quad (3.20.7)$$

$$Q_{jl}^e = \mathcal{I}^e \frac{\partial \xi|^e}{\partial z} \iint_{\xi\eta} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} H_l d\xi d\eta + \mathcal{I}^e \frac{\partial \eta|^e}{\partial z} \iint_{\xi\eta} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} H_l d\xi d\eta \quad (3.20.8)$$

$$B_{jk}^e = \mathcal{I}^e \iint_{\xi\eta} \frac{1}{\theta_0} N_i N_k d\xi d\eta \quad (3.20.9)$$

$$V_{jk}^e = \mathcal{I}^e \iint_{\xi\eta} \left(1 - \frac{y_i}{y_i} \right) N_i N_k d\xi d\eta \quad (3.20.10)$$

$$T_{jk}^e (K_{M,i}^e) = \tau_{ijk}^e K_{M,i}^e \quad (3.20.11)$$

$$\tau_{ijk}^e \text{ s. o. } DY_{jk}^e (K_{M,i}^e)$$

$$b_{1,i}^e = \frac{1}{\epsilon R_0} SX_i^e - \left\{ \frac{1}{g_0} r_{(G^e)}^e \dot{N}_i^e (\dot{i} \cdot \hat{q}_3) ds \right\}' \quad (3.20.12)$$

$$b_{2,i}^e = -\frac{1}{\epsilon R_0} SY_i^e - \left\{ \frac{1}{g_0} r_{(G^e)}^e \dot{N}_i^e (\dot{j} \cdot \hat{q}_3) ds \right\}' \quad (3.20.13)$$

$$b_{3,i}^e = - \left\{ \frac{1}{g_0} r_{(G^e)}^e \dot{N}_i^e (\dot{k} \cdot \hat{q}_3) ds \right\}' \quad (3.20.14)$$

$$b_{4,i}^e = - \left\{ r_{(G^e)}^e \dot{N}_i^e \hat{q}_4 ds \right\}' \quad (3.20.15)$$

$$SX_i^e = v_i \int_{\xi\eta}^e N_i d\xi d\eta \quad (3.20.16)$$

$$SY_i^e = u_i \int_{\xi\eta}^e N_i d\xi d\eta \quad (3.20.17)$$

Ein Vergleich von (3.5.1-19) mit (3.20.1-17) macht die durch den Übergang vom globalen kartesischen Koordinatensystem zu den lokalen Koordinaten $\{\xi, \eta\}$ erzielte gewaltige Verringerung des numerischen Aufwandes bei der Elementmatrizenberechnung deutlich. Bis auf die beiden Ausnahmen B_{ik}^e (bei diabatischer Schichtung) und V_{ik}^e (bei inhomogener Schichtungsstabilität) sind die Elemente aller konstituierenden Untermatrizen Linearkombinationen von Produkten aus elementabhängigen Transformationsfaktoren und normierten Integralen. Diese zahlreichen Integrale brauchen also für alle 328 (bzw. 422) Elemente stellvertretend nur ein einziges Mal berechnet zu werden. Lediglich die wegen (3.10)¹ elementweise konstanten Metrikkfaktoren $J^e, \left| \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|^e, \left| \frac{\partial \xi}{\partial z} \right|^e, \left| \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|^e, \left| \frac{\partial \eta}{\partial z} \right|^e$ müssen für jedes Element neu bestimmt werden.

Für homogene Schichtungsstabilität des Grundzustandes ($\frac{\partial \theta_0}{\partial z} = \text{const}$)

wird V_{ik}^e das Produkt eines elementabhängigen Faktors und einer wiederum aus normierten Integralen aufgebauten Matrix. Speziell für neutrale Schichtung ($\gamma_0 = \gamma_i$ bzw. $\theta_0 = \text{const}$) gilt dies auch für die Buoyancy-Untermatrix B_{ik}^e , so daß dann in der Elementmatrix M^e sogar überhaupt keine elementabhängigen Integrale mehr auftreten.

Abgesehen von seiner hohen geometrischen Anpassungsfähigkeit wird hier die Sonderstellung des geradlinigen Dreieckselementes im Hinblick auf die Modellnumerik deutlich. Wegen der Geradlinigkeit ist die Elementgeometrie durch die *drei* Eckknotenpunkte festgelegt, so daß *lineare* Transformationsbeziehungen zwischen dem $\{x, z\}$ - und dem $\{\xi, \eta\}$ -Koordinatensystem bestehen (vgl. 3.10). Sobald jedoch zur Bestimmung der Geometrie eines zweidimensionalen Elementes mehr als drei Punkte erforderlich sind, werden die Transformationsbeziehungen *nicht linear*. So bestehen z.B. bereits für das geradlinig-schiefwinklige Viereckselement bilineare Transformationsbeziehungen und die lokalen Koordinaten aller krummlinigen Elemente hängen in

jedem Fall nichtlinear von den globalen Koordinaten ab. Für alle diese Elemente werden daher die metrischen Faktoren J^e , $\left|\frac{\partial \xi}{\partial x}\right|^e$, $\left|\frac{\partial \xi}{\partial z}\right|^e$, $\left|\frac{\partial \eta}{\partial x}\right|^e$, $\left|\frac{\partial \eta}{\partial z}\right|^e$ koordinatenabhängig, so daß die Integrale in den konstituierenden Untermatrizen im Gegensatz zu (3.20.1 - 17) elementabhängig werden.

Allerdings bleibt auch dann die Verwendung der lokalen Elementkoordinaten vorteilhaft, weil sowohl das Integrationsgebiet als auch die Basisfunktionen N_j bzw. H_t nach wie vor normiert sind.

4. DIE MODELL - NUMERIK

4.1 BERECHNUNG DER ELEMENTMATRIZEN

Viele der Integrale in (3.20.1-17) könnten mit Hilfe der Quadraturformel

$$\int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=0}^{1-\xi} \xi^{\alpha} \eta^{\beta} d\xi d\eta = \frac{\alpha! \beta!}{(\alpha + \beta + 2)!}$$

in geschlossener Form integriert werden. Selbst bei Berücksichtigung aller in (3.20) enthaltenen Symmetrien bzw. Teilsymmetrien (in den Integralen von α_{ijk}^e und β_{ijk}^e bezüglich der Indizes i, j und in den Integralen von π_{ijk}^e , τ_{ijk}^e und σ_{ijk}^e bezüglich j, k) bedeutete das jedoch wegen der großen Zahl der Integrale einen außerordentlichen Aufwand an nichtnumerischer Vorarbeit. Abgesehen davon blieben dann aber immer noch die wegen $\theta_0 = \theta_0(z(\xi, \eta))$ bzw. $V_3 = V_3(z(\xi, \eta))$ i. a. nicht mehr geschlossen integrierbaren Integrale der konstituierenden Untertermtrizen B_{jk}^e und V_{jk}^e übrig, die numerisch ausgewertet werden müßten.

Deshalb wurde im folgenden von vornherein auf mögliche exakte Integrationen verzichtet und sämtliche Integrale einheitlich mit Hilfe einer numerischen Quadratur approximativ berechnet. Hierzu wurde speziell eine GAUSSsche Quadratur 5. Ordnung gewählt :

$$\int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=0}^{1-\xi} \psi(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^7 w_i \psi(\xi_i, \eta_i) \quad (4.1)$$

mit

$$\sum_{i=1}^7 w_i = \int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=0}^{1-\xi} d\xi d\eta = \frac{1}{2}$$

Die 14 Stützstellenkoordinaten ξ_i, η_i und 7 Gewichte w_i sind dabei über die Forderung definiert, daß die approximative Quadraturformel (4.1) alle Polynome in ξ und η bis zum 5. Grad exakt integriert, d.h.

$$\int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=0}^{1-\xi} \sum_{j=0}^5 \sum_{k=0}^{5-j} c_{jk} \xi^j \eta^k d\xi d\eta = \sum_{i=1}^7 w_i \sum_{j=0}^5 \sum_{k=0}^{5-j} c_{jk} \xi_i^j \eta_i^k \quad (4.2)$$

Nach (geschlossener!) Integration auf der linken Seite folgt aus dem Faktorenvergleich der unabhängigen Polynomkoeffizienten c_{jk} ein System von 21 Bestimmungsgleichungen für die ξ_i, η_i, w_i , das nach der rechten Seite von (4.2) linear in den Gewichten, aber nichtlinear in den Stützstellenkoordinaten ist. Dieses System wurde mit Hilfe des in Kap. 4.2 besprochenen NEWTON - RAPHSON - Verfahrens approximativ gelöst, wobei die Iteration so oft wiederholt wurde, bis sich folgende Werte mit einem Fehler von $< 10^{-12}$ ergaben :

Stützstelle P_i	ξ_i	η_i	w_i
	0.33333 33333	0.33333 33333	0.11250 00000
2	0.05971 58717	0.47014 20641	0.06619 70764
3	0.47014 20641	0.05971 58717	0.06619 70764
4	0.47014 20641	0.47014 20641	0.06619 70764
5	0.79742 69853	0.10128 65073	0.06296 95903
6	0.10128 65073	0.79742 69853	0.06296 95903
7	0.10128 65073	0.10128 65073	0.06296 95903

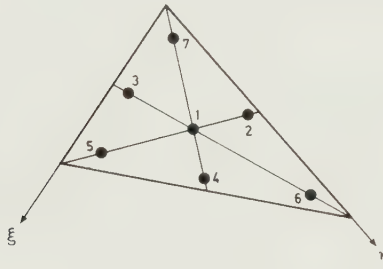


Abb. 15 : Lage der Stützstellen für die GAUSS-Quadratur 5. Ordnung über dem normierten Dreieckselement

Die angegebenen Werte wurden auf ihre Übereinstimmung mit den in [59], [71], [29] zitierten Werten überprüft. In [71] und [29] werden etwas irreführend die gemäß $\sum_{i=1}^7 w_i^* = 1$ normierten Gewichte aufgeführt, die sich auf ein flächennormiertes Element beziehen und mit den Gewichten w_i im Zusammenhang $w_i^* = J^e w_i$ ($J^e = 2$) stehen.

Mit Hilfe von (4.1) wurden alle in (3.20.1-17) auftretenden elementunabhängigen Integrale berechnet und übereinstimmend mit den konstituierenden Untermatrizen A_{jk}^e , DX_{jk}^e , DY_{jk}^e , DZ_{jk}^e , D_{jk}^e , C_{jk}^e , F_{jk}^e , Q_{jk}^e , T_{jk}^e bzw. den Kraftvektoranteilen SX_j^e , SY_j^e indiziert auf Kernspeicherfeldern abgelegt. Dabei wurden alle Symmetrien bzw. Teilsymmetrien dieser Matrizen ausgenutzt. Bei der Bildung der Elementmatrix M^e brauchten dann diese Integralwerte nur jeweils aufgerufen und mit den aktuellen aus J^e , $\frac{\partial \xi}{\partial x}|^e$, $\frac{\partial \xi}{\partial z}|^e$, $\frac{\partial \eta}{\partial x}|^e$, $\frac{\partial \eta}{\partial z}|^e$ aufgebauten Metrifaktoren multipliziert zu werden. Dagegen mußte die numerische Quadratur der elementabhängigen Integrale in den Untermatrizen B_{jk}^e und V_{jk}^e für jeden aktuellen Elementindex e wieder gemäß (4.1) neu berechnet werden. Jedoch wurden auch für diese Integrale sämtliche elementunabhängigen Bestandteile der Integranden für die sieben GAUSS-Punkte schon vorweg berechnet und für das Unterprogramm zur M^e -Berechnung verfügbar abgespeichert.

Zur algorithmischen Vereinfachung der in der *Front*-Prozedur (s.u.) simultan durchgeführten Einweisung der Elementbeiträge in die globalen *GALEKIN*-Gleichungen und der innerhalb der *NEWTON*-*RAPHSON*-Iteration erforderlichen *GAUSS*-Eliminationen wurde eine Umordnung der Komponenten des Variablenvektors Ψ^e vorgenommen. Indem die Elementfreiheitsgrade fortlaufend mit dem lokalen Knotenpunktindex jeweils in der Reihenfolge $u_i^e, v_i^e, w_i^e, \vartheta_i^e, p_i^e$ für $i=1,2,3$ und $u_i^e, v_i^e, w_i^e, \vartheta_i^e$ für $i=4,5,6$ durchnummeriert werden, wird der 27-komponentige Elementvariablenvektor zu

$$\Psi^e = (u_1^e, v_1^e, w_1^e, \vartheta_1^e, p_1^e, u_2^e, v_2^e, w_2^e, \vartheta_2^e, p_2^e, \dots, u_4^e, v_4^e, w_4^e, \vartheta_4^e, \dots) \quad (4.3)$$

Das bedingt auch eine Umordnung der Elementmatrix, wodurch die übersichtliche Blockstruktur von (3.18) verlorengeht. Dieser Aufbau von M^e wurde im Programm durch eine entsprechende Einweisung aller Matrixelemente unmittelbar nach deren Berechnung realisiert.

4.2 DIE LÖSUNG DES GESAMTSYSTEMS

Das System der $4N+N = 3027$ (bzw. in der Talversion 3907) algebraisierten nichtlinearen *GALEKIN*-Gleichungen für die Variablen $u_k, v_k, w_k, \vartheta_k, p_k$ ($k=1, \dots, N$; $\ell=1, \dots, N$) sei in symbolischer Form geschrieben als

$$F(\Psi) = 0 \quad (4.4)$$

worin $\Psi = (u_1, \dots, u_N, v_1, \dots, v_N, w_1, \dots, w_N, \vartheta_1, \dots, \vartheta_N, p_1, \dots, p_N)$ der globale Variablenvektor ist. Zur Behandlung der Knotenpunktwerte $K_{m,i}$ ($i=1, \dots, N$), die nicht als Variable des Systems (4.4) aufgefaßt werden, s.o. S 26 und weiter unten S 84. Wegen der Separierung der $K_{m,i}$ vom Variablenvektor Ψ hat das System (4.4) mit Rücksicht auf (3.18) die Struktur

$$\begin{aligned} F(\Psi) &= M(\Psi) \cdot \Psi - f \\ &= M_1(\Psi) \cdot \Psi + M_2 \cdot \Psi - f = 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Hierin ist M die Systemmatrix, die in der in Kap. 1 dargestellten Weise aus den Elementbeiträgen (3.19) aufgebaut ist. Sie setzt sich additiv zusammen aus einer vom Variablenvektor Ψ abhängigen Matrix M_1 und einer konstanten Matrix M_2 . f ist der "Vektor der rechten Seiten" des Systems (4.5), der alle inhomogenen Terme enthält. Er wird gebildet vom Kraftvektor b , der nach S 59 die treibende Druckbeschleunigung sowie sämtliche Randbedingungen vom *NEUMANN*- bzw. *CAUCHY*-Typ enthält und den variablenunabhängigen Termen, die aus der Einführung der *DIRICHLET*-Randbedingungen in $M(\Psi) \cdot \Psi$ resultieren.

Die Lösung des Systems (4.5) ist prinzipiell und vom Aufwand her das numerische Kernstück des nichtlinearen Finite-Elemente-Modells.

Das Standardproblem der Lösung eines sehr großen nichtlinearen Gleichungssystems wird hier besonders drastisch durch die Asymmetrie der variablen Systemmatrix $M(\psi)$. Dazu kommt die sehr sensible Beeinflussung bzw. sogar Limitierung der Konvergenz jeglicher Iterationsalgorithmen durch kritische Werte physikalischer Parameter. Als solche erweisen sich in der Matrix M_2 die Schichtungsstabilität γ , und vor allem die nach (2.4-9,10) fortwährend neu aus dem Variablenvektor ψ berechnete Verteilung der turbulenten Viskosität K_M . Im Vektor b sind es die dynamischen und thermischen Antriebe, gegeben durch den geostrophischen Windvektor $v_{h,g}$ bzw. die Bodenrandbedingung $\partial(x, h(x)) = f(x)$.

Die wichtigsten Angebote der numerischen Mathematik zur Lösung dieses Problems sind die direkten Iterationsverfahren in Gesamt- und Einzelschritten, die *NEWTON-RAPHSON*-Iteration sowie die Inkrement-Methode.

Stellvertretend für die zahlreichen Varianten der direkten Iteration (zur Übersicht hierzu s. z.B. [41], [45]) sei hier die *PICARD*-Iteration skizziert, mit der im Rahmen des vorliegenden Modells Lösungen des *GALERKIN*-Gleichungssystems (3.4.1-5) allerdings nur unter physikalisch unbefriedigenden Limitierungen gelangen.

Hierbei wird das System (4.5) in der Umgebung einer v -ten Näherungslösung ψ^v dadurch linearisiert, daß die variable Matrix $M_1(\psi)$ durch die entsprechende mit ψ^v gebildete Matrix ersetzt wird, d.h.

$$F(\psi) \approx F_{LIN}(\psi) =: M_1(\psi^v) \cdot \psi + M_2 \cdot \psi - f = 0$$

Indem die Lösung dieses linearen Systems als eine $(v+1)$ -te verbesserte approximative Lösung des ursprünglichen Systems (4.5) erhofft wird, ergibt sich das Iterationsschema

$$M_1(\psi^v) \cdot \psi^{v+1} + M_2 \cdot \psi^{v+1} - f = 0$$

bzw. explizit

$$\psi^{v+1} = [M_1(\psi^v) + M_2]^{-1} \cdot f \quad (4.6)$$

Die Iterationsvorschrift (4.6) ist gerade im Hinblick auf den sehr hohen Rang der beteiligten Matrizen die algorithmisch einfachste im Vergleich zu anderen Verfahren. Dafür ist ihre Anwendungsfähigkeit begrenzt, weil die Konvergenz dieser Iteration sehr sensibel abhängt sowohl von der Güte der Startnäherung ψ^0 als auch von den oben aufgezählten physikalischen Einflußgrößen, insbesondere von $|v_{h,g}|$ und der K_M -Verteilung. Dies bewirkt, daß die algorithmische Effektivität des Schemas dadurch entwertet wird, daß zur Erzwingung von Konvergenz außerordentlich hoch auflösende Gebietsdiskretisierungen erforderlich sind. So konnte z.B. mit den im vorliegenden Modell endgültigen Elemententeilungen (Abb. 13a, b) im Fall erzwungener Konvektion mit $|v_{h,g}| = 10 \text{ m/sec}$ Konvergenz nur erreicht werden, wenn für die turbulente Viskosität ein unsinnig hohes Limit von $50-100 \text{ m}^2/\text{sec}$ gesetzt wurde. Solche Werte liegen aber selbst bei Konvektion mit starkem Antrieb noch oberhalb der nach (2.4-9) bzw. (2.10) berechneten lokalen Maxima von $K_M(r)$. Auch Versuche mit

verbesserten Versionen von (4.6), in denen Ψ^v durch gewichtete Mittel der vorangegangenen Approximationen Ψ^{v-1} und Ψ^v ersetzt wurde, brachten nur unbedeutende Fortschritte.

Weil sich das *NEWTON-RAPHSON*-Verfahren bisher in allen Experimenten mit dem vorliegenden Modell bewährt hat, wird seiner Beschreibung nachfolgend ein eigener Abschnitt eingeräumt. Zuvor soll auf eine Schwierigkeit eingegangen werden, die das *NEWTON-RAPHSON*-Verfahren trotz seiner Überlegenheit gegenüber allen direkten Iterationsalgorithmen mit diesen gemeinsam hat. Notwendig für den Erfolg dieser iterativen Lösungsmethoden ist eine Startnäherung Ψ^0 , die schon hinreichend nahe bei der wahren Lösung liegt. In fast allen Experimenten mit dem vorliegenden Konvektionsmodell erwies sich die Lösung des durch Streichung aller Advektionsterme aus (2.3) hervorgehenden linearen Gleichungssystems als ausreichend für eine konvergente *NEWTON-RAPHSON*-Iteration. Lediglich in zwei von insgesamt über 200 Experimenten reichte die lineare Startnäherung auch bei Anwendung einer K_M -Dekrementierung (s.u. S 84) während der ersten Zyklen der *NEWTON-RAPHSON*-Iteration nicht mehr aus für die Annäherung an die Lösung des nichtlinearen Systems. Die Ursachen hierfür waren in beiden Fällen große Beträge der Bodentemperaturverteilung $\vartheta(x, h(x)) = f(x)$ und der treibenden Druckbeschleunigung $f k \times v_{h,3}$, d.h. große Beträge des Vektors b .

Aber auch in solchen Extremfällen gibt es immer noch eine Möglichkeit, die *NEWTON-RAPHSON*-Iteration zur Konvergenz zu bringen, indem diese mit einer besseren als der linearen Startnäherung eingeleitet wird.

Eine solche verbesserte Anfangsnäherung läßt sich unter allen Umständen mit dem sehr aufwendigen, aber von der Idee her bestechenden *Inkrement*-Verfahren gewinnen. Mit ihm wird das Problem der Lösung von (4.5) in folgender Weise formal den numerischen Methoden der Integration eines Anfangswertproblems zugänglich gemacht.

Sind weder im Inneren noch auf dem Rand des Integrationsgebietes dynamische und / oder thermische Antriebsquellen gegeben, dann ist seiner Bedeutung nach $f=0$ und für die algebraische Abbildung (3.18) des Differentialgleichungssystems (2.13) existiert nur die Trivillösung

$$\Psi(f=0) = 0 \quad (4.7)$$

Unter der Voraussetzung, daß sich die Lösung Ψ mit dem "Input-Vektor" f stetig ändert, läßt sich ausgehend von (4.5) für $\Psi(f)$ ein Anfangswertproblem mit der Anfangsbedingung (4.7) formulieren, indem in (4.5) f ersetzt wird durch $f' = \lambda f$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$. Mit Hilfe des Parameters λ kann dann der Quell- und Randbedingungsvektor von $f'=0$ auf seinen gegebenen Zustand $f'=f$ "hochgeregelt" werden. Da demnach λ die Quell- bzw. Antriebsstärke regelt, ist auch $\Psi = \Psi(\lambda)$. In Verallgemeinerung von (4.5) schreibt man also

$$F(\Psi(\lambda), \lambda) = M(\Psi(\lambda)) \cdot \Psi(\lambda) - \lambda f = 0 \quad (4.8)$$

Das gegebene Problem (4.5) ist für $\lambda = 1$ in (4.8) enthalten. Die Ableitung von (4.8) nach dem Parameter λ liefert zusammen mit (4.7) das Anfangswertproblem bezüglich λ :

$$\frac{d\Psi}{d\lambda} \cdot \frac{\partial(M(\Psi) \cdot \Psi)}{\partial \Psi} - f = 0 \quad (4.9)$$

$$\Psi(\lambda = 0) = 0$$

In der hier verwendeten symbolischen Schreibweise müßten als Linksfaktoren auftretende Vektoren als Zeilenvektoren gekennzeichnet werden. Zur Übersichtlichkeit der Darstellung wird darauf verzichtet. Transponierte Matrizen werden im weiteren durch ein hochgestelltes T markiert.

(4.9) kann nun mit Hilfe irgendeines der klassischen Ein- oder Mehrschrittverfahren (z.B. *RUNGE - KUTTA* - oder *Prediktor - Korrektor - Schema*) inkrementweise integriert werden gemäß

$$\Psi^{\nu+1} = \Psi^{\nu} + f \cdot \int_{\nu \delta \lambda}^{(\nu+1) \delta \lambda} \left[\frac{\partial(M(\Psi) \cdot \Psi)}{\partial \Psi} \right]^{-1} d\lambda \quad (4.10)$$

mit $\Psi^{\nu+1} = \Psi(\lambda = (\nu+1) \delta \lambda)$ und $\Psi^{\nu} = \Psi(\lambda = \nu \delta \lambda)$. Die einfachste Version von (4.10) ergibt sich bei Anwendung des *EULER* - (Ein-schritt-) Verfahrens zu

$$\Psi^{\nu+1} = \Psi^{\nu} + f \cdot \left[\frac{\partial(M(\Psi) \cdot \Psi)}{\partial \Psi} \right]^{-1} \bigg|_{\Psi^{\nu}} \delta \lambda \quad (4.10)'$$

Je nach der Schrittweite $\delta \lambda$ und dem angewandten Schrittverfahren läßt sich mit (4.10) entweder die Lösung von (4.5) selbst oder aber wenigstens mit größerer Schrittweite ein zur Konvergenz hinreichend genauer Startwert für eine anschließende *NEWTON - RAPHSON* - Iteration erzeugen. Ihre überragende Bedeutung erhält die von *ZIENKIEWICZ* [79] in einer knappen vergleichenden Wertung favorisierte Inkrement-Methode dadurch, daß mit ihr im Gegensatz zu allen anderen Verfahren Konvergenz immer zu erreichen ist, wenn nur die Inkremente klein genug gewählt werden. Selbst an der einfachsten Version (4.10)' wird aber deutlich, welchen gewaltigen Rechenaufwand eine solche Iteration erfordert.

Es ist deshalb zweckmäßig, (4.10)' bzw. (4.10) nur so lange zu verwenden, bis mit Ψ^{ν} Anschluß an eine konvergente *NEWTON - RAPHSON* - Iteration erreicht ist.

DIE NEWTON - RAPHSON - ITERATION

Wie die direkten Iterationen basiert das wesentlich leistungsfähigere *NEWTON - RAPHSON* - Verfahren auf der Konstruktion einer Folge von linearen Hilfsproblemen, deren Lösungen gegen diejenige des nichtlinearen Ausgangsproblems konvergieren. Das $(\nu + 1)$ - te dieser Hilfsprobleme wird dabei erzeugt durch Linearisierung des gegebenen Systems $F(\Psi) = 0$ mit Hilfe einer *TAYLOR* - Entwicklung von $F(\Psi)$ in der Umgebung einer zuvor gewonnenen Näherungslösung Ψ^ν , d.h.

$$\begin{aligned} F(\Psi) &\approx F_{LIN}(\Psi) = F(\Psi^\nu) + \delta\Psi \cdot \frac{\partial F}{\partial \Psi}(\Psi^\nu) \\ &= F(\Psi^\nu) + (\Psi - \Psi^\nu) \cdot \frac{\partial F}{\partial \Psi}(\Psi^\nu) = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Unter der Konvergenzvoraussetzung, daß die Lösung des "Tangentialsystems" (4.11) eine $(\nu + 1)$ - te verbesserte Approximation der Lösung von $F(\Psi) = 0$ ist, ergibt sich das *NEWTON - RAPHSON* - Iterationsschema

$$(\Psi^{\nu+1} - \Psi^\nu) \cdot \frac{\partial F}{\partial \Psi}(\Psi^\nu) = -F(\Psi^\nu) \quad (4.12)$$

Für die spezielle Form (4.5) der Nichtlinearität des Systems (3.18) ergibt sich eine algorithmische Entlastung, denn mit Rücksicht auf

$$\frac{\partial F}{\partial \Psi} = \frac{\partial M}{\partial \Psi} \cdot \Psi + M^T$$

hebt sich in (4.12) der Anteil $-\Psi^\nu \cdot M^T(\Psi^\nu)$ der linken Seite gegen den entsprechenden Anteil von $F(\Psi^\nu)$ weg und es bleibt nur

$$(\Psi^{\nu+1} - \Psi^\nu) \cdot \frac{\partial M}{\partial \Psi} \cdot \Psi^\nu + \Psi^{\nu+1} \cdot M^T(\Psi^\nu) = f$$

bzw.

$$\Psi^{\nu+1} \cdot \left[\frac{\partial M}{\partial \Psi} \cdot \Psi^\nu + M^T(\Psi^\nu) \right] = f + \Psi^\nu \cdot \frac{\partial M}{\partial \Psi} \cdot \Psi^\nu \quad (4.13)$$

als lineares System zur Bestimmung der $(\nu + 1)$ - ten verbesserten

Näherungslösung $\Psi^{\nu+1}$. Hierin hängt der Anteil $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \Psi}$ der Tangentialmatrix $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \Psi}(\Psi^\nu)$ nicht mehr von Ψ^ν ab, weil die Matrix $\mathbf{M}$ mit ihren Elementbeiträgen (3.20.1-17) selbst nur eine lineare Funktion der Freiheitsgrade ist.

Zum Problem der Startnäherung Ψ^0 und der Konvergenz des Schemas (4.13) für das GALERKIN-System (3.18) siehe S 84 und weiter unten S 86.

Das NEWTON-RAPHSON-Hilfsproblem (4.13) läßt sich in derselben Weise aus den Elementbeiträgen aufbauen wie die ursprünglichen nichtlinearen GALERKIN-Gleichungen gemäß (3.18). Mit Rücksicht auf $\mathbf{F}(\Psi) = \sum_{e=1}^E \mathbf{F}^e(\Psi)$ gilt nämlich statt (4.11)

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{LIN}}(\Psi) &= \sum_{e=1}^E \mathbf{F}_{\text{LIN}}^e(\Psi^e) = \\ &= \sum_{e=1}^E \left[\mathbf{F}^e(\Psi^{e,\nu}) + (\Psi^e - \Psi^{e,\nu}) \cdot \frac{\partial \mathbf{F}^e}{\partial \Psi^e}(\Psi^{e,\nu}) \right] = 0, \end{aligned}$$

worin Ψ^e die Komponente des Variablenvektors Ψ ist, die alle Freiheitsgrade des Elements "e" enthält. Dieser additive Aufbau überträgt sich auch auf das Iterationsschema (4.13). Die Elementsummandendarstellung soll hier aber nicht überstrapaziert werden, da ihr wegen der dann stets zu berücksichtigenden Zuordnung $j^e(J) \leftrightarrow J$ von lokalen und globalen Indizes eine gewisse Schwerfälligkeit anhaftet.

Die spezielle Form (4.5) der Nichtlinearität in $\mathbf{F}(\Psi)$ führt im System der Elementbeiträge zu derselben algorithmischen Vereinfachung wie im Gesamtsystem (4.13) gegenüber (4.11). Wegen der rückkoppelnden Berechnung des K_M -Feldes nach (2.4-9,10) ist im System der Elementbeiträge zum $(\nu+1)$ -ten NEWTON-RAPHSON-Hilfsystem in $K_{M,i}^{e,\nu} = K_{M,i}^e(\Psi^\nu)$ zu setzen. Damit ergeben sich die Elementbeiträge zum NEWTON-RAPHSON-System (4.13) als

$$\begin{aligned} \Psi^{e,\nu+1} \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{M}_i^e}{\partial \Psi^e} \cdot \Psi^{e,\nu} + \mathbf{M}^{eT}(\Psi^{e,\nu}, K_{M,i}^{e,\nu}) \right] &= \\ &= \mathbf{f}^e + \Psi^{e,\nu} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}_i^e}{\partial \Psi^e} \cdot \Psi^{e,\nu} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Weil die DIRICHLET-Randbedingungen noch nicht auf der Ebene der Elementbeitragsberechnungen, sondern erst während der Lösungsprozedur für das Gesamtsystem (4.13) berücksichtigt werden, reduziert sich in (4.14) der Vektor $\mathbf{f}^e$ auf den Beitrag $\mathbf{b}^e$ zum Kraftvektor. Mit Rücksicht darauf und auf die Darstellungen (3.20.1-17) für die konstituierenden Untermatrizen von $\mathbf{M}^e$ und die Komponenten von $\mathbf{b}$ lautet das in dieser Form auch programmierte System (4.14) der Elementbeiträge für das GALERKIN-System (3.18) ausführlich:

ELEMENTBEITRÄGE ZUM NEWTON-RAPHSON SYSTEM

$F_{1,i}^{e,\nu+1}$	$\alpha_{1k,i}^e U_i^{e,\nu} A_i^e(U_i^{e,\nu}, w_i^{e,\nu}) + \frac{1}{\epsilon \text{Re}} D_i^e(K_{n,i}^{e,\nu})$	$-\frac{1}{\epsilon \text{Re}} C_{1k}^e$	$\beta_{1k,i}^e U_i^{e,\nu} + \frac{\epsilon}{\text{Re}} D_{1k}^e(K_{n,i}^{e,\nu})$	$\circ$	$-P_{1i}^e$	$U_k^{e,\nu+1}$
$F_{2,i}^{e,\nu+1}$	$\alpha_{1k,i}^e v_i^{e,\nu} + \frac{1}{\epsilon \text{Re}} C_{1k}^e$	$A_{1k,i}^e(U_i^{e,\nu}, w_i^{e,\nu}) + \frac{1}{\epsilon \text{Re}} D_{1k}^e(K_{n,i}^{e,\nu})$	$\beta_{1k,i}^e v_i^{e,\nu}$	$\circ$	$\circ$	$v_k^{e,\nu+1}$
$F_{3,i}^{e,\nu+1}$	$\alpha_{1k,i}^e w_i^{e,\nu} + \frac{1}{\epsilon \text{Re}} D_{1k}^e(K_{n,i}^{e,\nu})$	$\circ$	$\beta_{1k,i}^e w_i^{e,\nu} + A_{1k,i}^e(U_i^{e,\nu}, w_i^{e,\nu}) + \frac{1}{\epsilon \text{Re}} D_{1k}^e(K_{n,i}^{e,\nu})$	$-\frac{\epsilon \Gamma}{\epsilon \text{Re}^2} B_{1k}^e$	$-\frac{1}{\epsilon^2} Q_{1i}^e$	$w_k^{e,\nu+1}$
$F_{4,i}^{e,\nu+1}$	$\alpha_{1k,i}^e s_i^{e,\nu}$	$\circ$	$\beta_{1k,i}^e s_i^{e,\nu} V_{1k}^e$	$A_{1k,i}^e(U_i^{e,\nu}, w_i^{e,\nu}) + \frac{1}{\epsilon \text{PrRe}} T_{1k}^e(K_{n,i}^{e,\nu})$	$\circ$	$s_k^{e,\nu+1}$
$F_{5,i}^{e,\nu+1}$	p_{1k}^e	$\circ$	Q_{1k}^e	$\circ$	$\circ$	$p_i^{e,\nu+1}$

+

$$+ \frac{b_{1,i}^e - A_{1k,i}^e(U_i^{e,\nu}, w_i^{e,\nu}) U_k^{e,\nu}}{b_{2,i}^e - A_{1k,i}^e(U_i^{e,\nu}, w_i^{e,\nu}) v_k^{e,\nu}} + \frac{b_{3,i}^e - A_{1k,i}^e(U_i^{e,\nu}, w_i^{e,\nu}) w_k^{e,\nu}}{b_{4,i}^e - A_{1k,i}^e(U_i^{e,\nu}, w_i^{e,\nu}) s_k^{e,\nu}} \quad (4.14)^*$$

Zu beachten ist in (4.14)* die unterschiedliche Stellung der Summationsindizes in α_{ijk}^e bzw. β_{ijk}^e einerseits in der Advektions-Untermatrix $A_{ijk}^e(u_i^{e,\nu}, w_i^{e,\nu}) = \alpha_{ijk}^e u_i^{e,\nu} + \beta_{ijk}^e w_i^{e,\nu}$ und andererseits in den gegenüber (3.19) hinzugekommenen Anteilen der Tangentialmatrix $\frac{\partial F^e}{\partial \Psi^e}$.

DIE FRONT - VARIANTE DES GAUSS - ALGORITHMUS

Zur Lösung der linearen Hilfssysteme (4.13) des *NEWTON-RAPHSON*-Iterationsalgorithmus wurde die *Front*-Variante des *GAUSS*schen Eliminationsverfahrens angewendet.

Im Vergleich zu einem auf derselben Stützstellendichte basierenden Differenzenschema sind die Variablen im *GALERKIN*-System (3.18) übergreifender gekoppelt, d.h. jede der Gesamtgleichungen enthält i.a. mehr benachbarte Freiheitsgrade als eine entsprechende Differenzengleichung. Trotz der damit größeren Anzahl der von Null verschiedenen Elemente sind die Matrizen des *GALERKIN*-Systems (3.18) bzw. des zugehörigen *NEWTON-RAPHSON*-Hilfssystems im Vergleich zu ihrer Ordnung schwach besetzt. So sind z.B. von den mehr als $1,5 \cdot 10^7$ Elementen der Gesamtmatrix für die Bergversion nur knapp über $2 \cdot 10^5$ von Null verschieden.

Da in jede *GALERKIN*-Gleichung nur Freiheitsgrade eingehen, die auf dem Teilgebiet definiert sind, über dem die Gewichtsfunktion dieser Gleichung ungleich Null ist, läßt sich durch geeignete Knotenpunktnumerierung immer eine Bandstruktur der Gesamtmatrix erzeugen. Dabei ist anschaulich klar, daß die lokale Bandbreite gleich ist der Differenz zwischen größtem und kleinstem globalen Variablenindex innerhalb des Elementverbandes, der die jeweilige *GALERKIN*-Gleichung konstituiert. Sowohl Speicherbedarf als auch Rechenaufwand von band- und hüllenorientierten Varianten des *GAUSS*schen Eliminationsverfahrens hängen also ganz wesentlich von der Knotenpunktnumerierung ab. Obwohl spezielle Optimierungsalgorithmen für die Knotennumerierung entwickelt wurden (vgl. hierzu [59]), wird die Leistungsfähigkeit der Band- und Hüllenalgorithmen insbesondere bei großen Systemen noch deutlich übertroffen von der *Front*-Variante des *GAUSS*-Verfahrens, die im vorliegenden Modell verwendet wurde.

Die Idee der Frontlösmethode wurde zuerst 1970 von IRONS [31] vorgetragen und für die Lösung eines symmetrischen positiv definiten Gleichungssystems entwickelt. Noch 1980 wird in der sonst guten Darstellung in [59] diese Methode als ein "effizientes Verfahren zur Lösung sehr großer symmetrisch-definiten Gleichungssysteme von Bandstruktur" unter Wert gewürdigt. Bereits 1976 hat nämlich HOOD [27] eine Verallgemeinerung des Frontalgorithmus zur Anwendung auf nichtsymmetrische Matrizen entwickelt, die überdies keine Bandstruktur der Matrix voraussetzt, so daß die aufwendige Optimierung der Knotennumerierung gegenstandslos wird.

Das Prinzip der Frontlösmethode besteht in der operativen Kopplung der Elementbeitragsberechnung sowie des Aufbaus der *GALERKIN*-Gleichungen mit dem *GAUSS*schen Eliminationsprozeß. Die

Idee dabei ist, jede *GALERKIN*-Gleichung zum frühest möglichen Zeitpunkt zur Kandidatur als Pivotgleichung zuzulassen und nach erfolgtem Eliminationsschritt extern abzuspeichern. Dieser Zeitpunkt ist im Prinzip erreicht, wenn die betreffende Gleichung vollständig aus ihren Elementbeiträgen aufgebaut, d.h. "endgültig" geworden ist. Die Zeit, für die die Koeffizienten und die rechte Seite einer *GALERKIN*-Gleichung maximal im Kernspeicher verweilen müssen, ist diejenige zwischen dem Auftauchen des ersten Elementbeitrages zu dieser Gleichung und ihrer Identifikation und Verwendung als Pivotgleichung. Die Dauer dieser *aktiven Phase* jeder Gleichung - gemessen an der Zahl der Zyklen in der Schleife zur Elementbeitragsberechnung - bestimmt die Zahl der gleichzeitig im Kernspeicher unterzubringenden Gleichungen und damit den dafür erforderlichen Kernspeicherbedarf. Analog zur Bandbreite bei konventionellen Bandalgorithmen läßt sich für die Frontmethode ein Maß für diesen Mindestbedarf an permanenten Kernspeicherplätzen angeben.

Dazu soll ein Ausschnitt aus der Elemententeilung der Berg-Modellversion (s. Abb. 13a) unmittelbar vor dem linken Hang betrachtet werden :

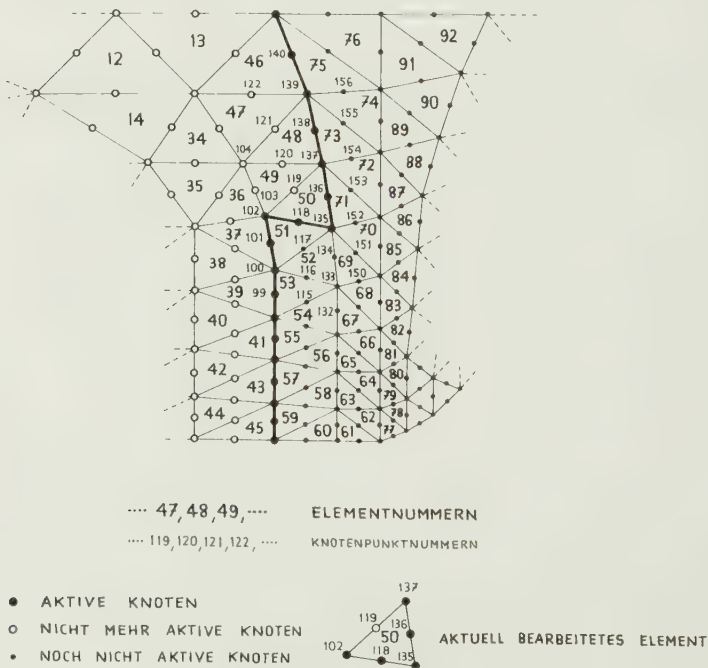


Abb. 16 : Zum Front - Lösungsverfahren

Die Abb. 16 zeigt die aktuelle Situation der Frontprozedur im Augenblick der Bearbeitung des Elementes "50" nach vorangegangener Berechnung und Einweisung aller Beiträge der Elemente 1 - 49 zu den globalen *GALERKIN*-Gleichungen. Die dick markierten und durch die dicke Linie verbundenen Knotenpunkte bzw. die ihnen zugeordneten Freiheitsgrade bilden die *Front*. Diese Knoten zeichnen sich dadurch aus, daß jeder von ihnen einerseits bereits mindestens einmal, andererseits aber noch nicht zum letztenmal in einem aufgerufenen Element aufgetreten ist. Das bedeutet, daß zu allen *GALERKIN*-Gleichungen, deren globale Indizes diesen *aktiven* Knoten zugeordnet sind, zwar schon Elementbeiträge berechnet und zugeordnet wurden, diese Gleichungen aber noch nicht vollständig aufgebaut sind. Die aktuelle *Frontbreite* beträgt nach Bearbeitung des Elementes "50" 19 Knoten (10 Eck- und 9 Seitenmittelpunkte) und damit nach der gemäß Abb. 12 vereinbarten Variablenzuweisung 86 Freiheitsgrade. In diesem Augenblick sind also 86 *GALERKIN*-Gleichungen "eröffnet", aber noch nicht vollständig aufgebaut. Die Koeffizienten und rechten Seiten dieser aktiven Gleichungen werden auf jeden Fall bis zu ihrer Komplettierung im Kernspeicher aufbewahrt. Mit der Abarbeitung jedes Elementes wird einerseits mit dem Aufbau neuer *GALERKIN*-Gleichungen begonnen, andererseits aber der Aufbau anderer Gleichungen abgeschlossen. Im obigen Beispiel werden bei der Bearbeitung des Elementes "50" die drei Knoten 118, 136 (Mittelpunkte) und 135 (Eckpunkt) zum erstenmal aufgerufen. Damit werden zu 13 *GALERKIN*-Gleichungen erstmalig Beiträge berechnet und eingewiesen. Andererseits tritt der Mittelpunktsknoten 119 in diesem Element zum letztenmal auf, d.h. der Aufbau der zugehörigen vier *GALERKIN*-Gleichungen wird vollendet. Diese vier Gleichungen ermöglichen nun vier weitere Eliminationsschritte im *GAUSS*-Algorithmus. Sie könnten nach Durchführung der Eliminationen also bereits extern abgespeichert werden, bis sie zum Rückwärtseinsetzen wieder aufgerufen werden müssen. Das Koeffizientenreservoir zur Pivotsuche wäre in diesem Fall jedoch sehr gering. Deshalb wird in der Frontprozedur eine Gleichung nicht sofort nach ihrer Komplettierung zur Elimination freigegeben, sondern es wird der Wechsel zwischen Elimination und Komplettierung weiterer *GALERKIN*-Gleichungen so eingerichtet, daß zu jedem *GAUSS*schen Reduktionsschritt eine vorgeschriebene Mindestanzahl vollständiger Gleichungen für die Pivotisierung im Kernspeicher zur Verfügung steht.

Aus dem vorangegangenen wird klar, daß für den erforderlichen permanenten Kernspeicherbedarf hier die Frontbreite maßgeblich ist. Das bedeutet, daß es beim Frontalgorithmus auf eine optimale Elementnumerierung ankommt, die aber viel leichter zu bewerkstelligen ist als die zur Minimierung der Bandbreite erforderliche optimale Knotenpunktnumerierung. Das Rezept ist einfach: Man muß nur von Anfang an die Elemente aufsteigend so numerieren, daß jeweils möglichst wenige Knoten zum erstenmal und gleichzeitig möglichst viele zum letztenmal auftreten. Im Zusammenhang mit Bandalgorithmen ist es dagegen eine sehr schwere Aufgabe, in jedem zu einer *GALERKIN*-Gleichung gehörigen Elementverband die Differenz zwischen kleinstem und größtem Variablenindex zu minimieren. Mehr noch als bei der erstmaligen Elemententeilung einer Modellgeometrie kommt dieser Vorteil zum Tragen, wenn lokale Verfeinerungen der Diskretisierung erforderlich werden bzw. unnötig hoch auflösende Einteilungen in gradientschwachen Teilgebieten vergrößert werden können.

Im Fall der Bandalgorithmen muß die Knotennumerierung dann von Grund auf neu optimiert werden, denn eine fortlaufende Numerierung in den eingefügten Elementen würde die Bandstruktur der Matrix i.a. völlig zerstören. Dagegen ist es bei der Frontprozedur völlig irrelevant, wenn z.B. ein neu hinzugekommener Freiheitsgrad mit der Nummer 3028 in dieselbe Gleichung aufgenommen wird, die u.a. schon den Freiheitsgrad mit dem Index 1 enthält. Während die lokale Bandbreite jetzt 3028 wäre, würde sich die Frontbreite vergleichsweise nur unwesentlich erhöhen. Weil jede Gleichung viel früher als Pivotgleichung eingesetzt und anschließend extern abgelegt wird als bei konventionellen Band- bzw. Hüllenalgorithmen, bleibt der mindestens erforderliche permanente Kernspeicherbedarf beim Frontalgorithmus deutlich unter dem der konkurrierenden Verfahren. Ein weiterer wesentlicher Vorteil der kompakteren Speicherung von potentiellen Pivotgleichungen und noch aktiven Gleichungen im Kernspeicher ist die gegenüber anderen Algorithmen erhebliche Reduktion arithmetischer Operationen beim Eliminationsprozeß. So demonstriert z.B. HOOD [27] an einem einfachen Beispiel, daß durch die GAUSSsche Elimination in einem Bandalgorithmus erheblich mehr von Null verschiedene Matrixelemente entstehen als beim Frontalgorithmus.

Der Preis für die genannten Vorzüge der Frontlösungsmethode besteht in einem im Vergleich zu konventionellen Verfahren erheblich höheren Verwaltungsaufwand und damit einer komplizierteren Algorithmusstruktur. Weil nicht nur der Status jeder aktiven GALERKIN-Gleichung, sondern jedes einzelnen ihrer Freiheitsgrade ständig kontrolliert werden muß, erfordert die Frontmethode einen beträchtlichen Aufwand an ein- und mehrdimensionalen Zeigerfeldern und dementsprechend vielen Adressenaufrufen und Abfrageoperationen im Programm.

Bezüglich detaillierterer Ausführungen über den Frontalgorithmus und seine Programmierung sei auf [31], [27], [25] verwiesen. Es muß jedoch darauf hingewiesen werden, daß die in der grundlegenden Arbeit von HOOD aufgeführte FORTRAN-Codierung einer Front-Routine für asymmetrische Matrizen einige fatale Fehler enthält. Ungünstig ist dort außerdem der auf sequentieller File-Organisation beruhende Datentransfer zwischen Kern- und Externspeicher. Durch adressierten Dateizugriff ließen sich die peripheren Rechenzeiten um den Faktor 10 verringern.

Zum wesentlichen sind an dieser Stelle jedoch noch zwei Bemerkungen über den Einbezug noch nicht komplettierter Gleichungen in den GAUSSschen Eliminationsprozeß sowie die Berücksichtigung der DIRICHLET-Randbedingungen erforderlich.

► Aus der Beschreibung des Frontalgorithmus geht hervor, daß bei jedem Reduktionsschritt auch die noch nicht vollständig aufgebauten Gleichungen in die GAUSSsche Elimination einbezogen werden. Die dabei stillschweigend vorausgesetzte Vertauschbarkeit von Beitragszuweisung und Elimination läßt sich aber leicht verifizieren: In dem im Kernspeicher aufbewahrten Teilsystem

$$M_{j1} \psi_1 = f_j$$

sei die $(J=\mu)$ -te Gleichung komplett aufgebaut. Dagegen sei z.B. die ν -te Gleichung noch aktiv und habe vom zuletzt bearbeiteten Element "e" die Beiträge $\delta M_{\nu I}^e$ bzw. δf_{ν}^e zu den bis dahin gültigen Koeffizienten $M_{\mu I}^*$ bzw. der rechten Seite f_{μ}^* erhalten. Mit Hilfe der endgültigen μ -ten Gleichung solle nun die Variable ψ_{μ} eliminiert werden. Mit der Voraussetzung, daß die Summenkonvention nicht für den Index μ gelte, hat das durch den GAUSS'schen Eliminationsschritt reduzierte System die Gestalt

$$\left(M_{JI} - \frac{M_{J\mu} M_{\mu I}}{M_{\mu\mu}} \right) \psi_I = f_J - \frac{M_{J\mu}}{M_{\mu\mu}} f_{\mu} \quad (J \neq \mu)$$

Speziell die ν -te (noch unvollständige) Gleichung ist im Status

$$\left(M_{\nu I}^* + \delta M_{\nu I}^e - \frac{M_{\nu\mu} M_{\mu I}}{M_{\mu\mu}} \right) \psi_I = f_{\nu}^* + \delta f_{\nu}^e - \frac{M_{\nu\mu}}{M_{\mu\mu}} f_{\mu} \quad (4.15)$$

Mit Rücksicht auf die Endgültigkeit aller Bestandteile der GAUSS'schen Produkte sind die Elementbeitragszuweisungen und die Elimination voneinander unabhängige additive Operationen, deren Reihenfolge daher vertauschbar ist.

► Zur algorithmischen Vereinfachung werden die DIRICHLET-Randbedingungen erst nach Komplettierung der Gleichungen eingeführt. Dazu werden die zu DIRICHLET-Randpunkten gehörigen GALERKIN-Gleichungen gelöscht und durch die entsprechenden Randbedingungen ersetzt. Dies muß jeweils vor den GAUSS'schen Reduktionen geschehen. Andernfalls wäre die Elimination unmöglich, weil die Gesamtmatrix ohne Berücksichtigung der Randbedingungen noch singulär ist.

KONVERGENZ UND KONVERGENZGESCHWINDIGKEIT

Im Gegensatz zur Inkrementmethode (4.10) existiert für die NEWTON-RAPHSON-Iteration (4.13) das empfindliche Problem der Startnäherung. Der Algorithmus konvergiert nur, wenn die Anfangsnäherung ψ^0 schon hinreichend nahe bei der wahren Lösung liegt. Wegen der für die Trägheitsbeschleunigungen maßgeblichen Form der Gebietsberandung beider Modellversionen und der vollständigen Kopplung von Temperatur- und Impulsfeld im Modellgleichungssystem (2.13) ist klar, daß sich eine solche Startnäherung nicht einmal für kleine Beträge der aufgeprägten Druckbeschleunigung $f_{k \times w_{h,4}}$ und der Bodentemperaturstörung "erraten" läßt.

Die beste Anfangsnäherung, die sich ohne Einsatz des aufwendigen Inkrementverfahrens beschaffen läßt, ist die Lösung des im STOKES'schen Sinn linearisierten Gleichungssystems, das durch Streichung aller Advektionsterme aus dem Modellgleichungssystem (2.13) hervorgeht (s. hierzu Abschnitt 4.3).

Wie bereits auf S 74 vorweggenommen, reichten bis auf zwei Ausnahmen in über 200 Experimenten diese zugeordneten linearen Lösungen zur Einleitung einer konvergenten *NEWTON-RAPHSON*-Iteration aus, in keinem einzigen Fall jedoch, wenn der Algorithmus mit ψ^0 beginnend unmittelbar auf das endgültige *GALERKIN*-System (3.18) angewendet wurde. Der Anschluß an eine konvergente *NEWTON-RAPHSON*-Iteration ließ sich nur herstellen durch einen schrittweisen Übergang vom linearisierten zum vollständig nichtlinearen *GALERKIN*-System (3.18).

Inspiziert durch das Prinzip der Inkrementmethode, wurde dies in der vorliegenden Arbeit realisiert durch eine Zerlegung des Iterationsalgorithmus für (3.18) in *zwei Abschnitte*.

► Während des ersten Abschnittes wird die turbulente Viskosität K_M nicht als Feldgröße aufgefaßt, d.h. nicht nach (2.4-9,10) als $K_M(\alpha, z_0, \left| \frac{\partial w_h}{\partial z} \right|, \frac{\partial \theta}{\partial z})$ berechnet. Vielmehr wird sie als räumlich konstanter Parameter zur "Hochregelung" der Nichtlinearität des Modellgleichungssystems im Sinn einer *REYNOLDS*-Zahl-Inkrementierung benutzt. Formal bedeutet das die Ersetzung aller Knotenpunktwerte $K_{M,i}^e$ im *GALERKIN*-System (3.18) durch einen konstanten Wert K_M , so daß nach (4.5) gilt:

$$M_1(\psi) \cdot \psi + M_2(K_M) \cdot \psi - f = 0 \quad (4.16)$$

In der Matrix M_2 treten mit Rücksicht auf $\sum_{i=1}^6 N_i(\xi, \eta) = 1$ erhebliche Vereinfachungen auf; denn in den Untermatrizen $DX_{jk}^e, DY_{jk}^e, DZ_{jk}^e, D_{jk}^e, T_{jk}^e$ (vgl. (3.20.2-5,11)) kommen dann keine dreifach indizierten Integrale mehr vor.

Die auf (4.16) angewendete *NEWTON-RAPHSON*-Iteration wurde nun eingebettet in eine weitere Iterationsschleife, mit deren Hilfe K_M bei konstant gehaltener *PRANDTL*-Zahl von einem sehr hohen (physikalisch bedeutungslosen) Anfangswert bis auf einen Wert dekrementiert wird, der schon in der Größenordnung der nach (2.4-9,10) berechneten K_M -Maxima liegt. Die Idee dabei ist, die *NEWTON-RAPHSON*-Iteration mit einem nur "schwach nichtlinearen" System (d.h. sehr kleine mit $|w_h|$ und K_M gebildete *REYNOLDS*-Zahl) zu beginnen, für das die Lösung des im *STOKES*-schen Sinn ($Re \rightarrow 0$) linearisierten Systems eine zur Konvergenz ausreichende Startnäherung ist. Danach wird die Viskosität um ein Dekrement δK_M vermindert, was einer Inkrementierung der *REYNOLDS*-Zahl entspricht. Für das solchermaßen "stärker nichtlineare" System wird eine neue *NEWTON-RAPHSON*-Iteration durchgeführt, wobei diesmal die für die vorangegangene grössere Viskosität gewonnene Lösung als Startnäherung verwendet wird. Dieser Wechsel zwischen K_M -Dekrementierung und *NEWTON-RAPHSON*-Iteration wird so lange vorangetrieben, bis die Trägheitsbeschleunigungen und die Temperaturadvektion in realistischen Größenordnungsverhältnissen zu den übrigen Beschleunigungen bzw. Wärmetransporten stehen. Nach jeder K_M -Dekrementierung

$$K_M^{M+1} = K_M^M - \delta K_M^{M+1}$$

hat somit der *jeweils erste* Zyklus der neuen *NEWTON-RAPHSON*-Iteration mit Rücksicht auf (4.13) die Gestalt

$$\begin{aligned} \Psi^1(K_M^{\mu+1}) \cdot \left[\frac{\partial M(K_M^{\mu+1})}{\partial \Psi} \cdot \Psi^0(K_M^{\mu}) + M^T(\Psi^0(K_M^{\mu}), K_M^{\mu+1}) \right] = \\ = f + \Psi^0(K_M^{\mu}) \cdot \frac{\partial M(K_M^{\mu+1})}{\partial \Psi} \cdot \Psi^0(K_M^{\mu}) \end{aligned} \quad (4.17.1)$$

worin $\Psi^0(K_M^{\mu})$ die konvergente Lösung für das System (4.16) mit der Vorgänger-Viskosität K_M^{μ} ist. Die jeweils auf (4.17.1) folgenden Iterationszyklen bis zur Erfüllung des vorgegebenen Konvergenzkriteriums (s.u.) für die dekrementierte Viskosität $K_M^{\mu+1}$ lauten dann

$$\begin{aligned} \Psi^{\nu+1}(K_M^{\mu+1}) \cdot \left[\frac{\partial M(K_M^{\mu+1})}{\partial \Psi} \cdot \Psi^{\nu}(K_M^{\mu+1}) + M^T(\Psi^{\nu}(K_M^{\mu+1}), K_M^{\mu+1}) \right] = \\ = f + \Psi^{\nu}(K_M^{\mu+1}) \cdot \frac{\partial M(K_M^{\mu+1})}{\partial \Psi} \cdot \Psi^{\nu}(K_M^{\mu+1}) \end{aligned} \quad (4.17.2)$$

Diese stufenweise Iterationsfolge erinnert wegen der K_M -Dekrementierung (*REYNOLDS*zahl-Inkrementierung) an die Inkrementmethode (4.10), ist mit dieser jedoch nicht verwandt. Die letztere bestand in der Konstruktion eines Anfangswertproblems bezüglich eines Quellparameters, mit dessen Hilfe die Quellfunktionen im Inneren und auf dem Rand des Integrationsgebietes inkrementiert wurden. In (4.17) haben jedoch alle dynamischen und thermischen Quellen von Anfang an ihre endgültigen Werte und es ist die Systemmatrix, die inkrementell verändert wird, wobei aber jedesmal das Randwertproblem in seiner ursprünglichen Form neu gelöst wird.

In allen hier durchgeführten Simulationen waren fünf bis sieben K_M -Dekrementierungen erforderlich, um von der linearen Startnäherung Ψ^0 über eine Folge von Lösungen des Hilfsproblems (4.17) zu einer Lösung $\Psi(K_M^{\mu})$ zu gelangen, die als Anfangsnäherung für eine konvergente *NEWTON-RAPHSON*-Iteration des vollständigen Systems (3.18) mit $K_M = K_M(z, z_0, \left| \frac{\partial v_h}{\partial z} \right|, \frac{\partial \theta}{\partial z})$ ausreichte. In den meisten Fällen genügte die Lösung von (4.17) für $K_M^{\mu} = 50 \text{ m}^2/\text{sec}$, spätestens aber die für $K_M^{\mu} = 30 \text{ m}^2/\text{sec}$ für den Anschluß an die Iteration mit berechneter K_M -Verteilung.

Weil für jede Dekrementfolge μ etwa zwei bis vier *NEWTON-RAPHSON*-Zyklen bis zur Erfüllung des gegebenen Konvergenzkriteriums erforderlich waren, hing die Gesamtrechnenzeit für eine vollständige Simulation ganz wesentlich von der gewählten K_M^{μ} -Folge ab. Deshalb wurden vor Beginn der Experimentreihen Testläufe zur numerischen Optimierung dieses ersten Iterationsabschnittes durchgeführt. Dabei wurde als günstigste K_M^{μ} -Folge im Sinne einer minimalen Gesamtzahl von Iterationszyklen gefunden: $K_M^{\mu} = \{ 600, 300, 180, 120, 75, 50, (30) \text{ m}^2/\text{sec} \}$.

► Mit den Lösungen Ψ ($K_M^M = 50$ (30) m^2/sec) als Startnäherung wurde der Anschluß an die *NEWTON-RAPHSON*-Iteration (4.13) des vollständigen Modellgleichungssystems (3.18) mit nach (2.4-9,10) berechneter K_M -Verteilung hergestellt. Die Iterationszyklen

$$\Psi^{\nu+1} \cdot \left[\frac{\partial M_1}{\partial \Psi} \cdot \Psi^{\nu} + M^T(\Psi^{\nu}, K_{M,i}^{\nu}) \right] = f + \Psi^{\nu} \cdot \frac{\partial M_1}{\partial \Psi} \cdot \Psi^{\nu} \quad (4.18)$$

mit den Elementbeiträgen (4.14) bzw. (4.14)* mußten dabei je nach der Topographieneigung und den durch $v_{h,q}, v_s, \vartheta(x, h(x)) = f(x)$ gegebenen physikalischen Bedingungen 6 bis 11 mal durchlaufen werden, bis jeweils das Konvergenzkriterium erfüllt war. Mit den durchschnittlich 17 erforderlichen Iterationszyklen (4.17) zur Konstruktion einer ausreichenden Anfangsnäherung für (4.18) waren daher zur vollständigen Durchführung jeder Konvektionssimulation im Mittel etwa 25 *NEWTON-RAPHSON*-Zyklen erforderlich. Auf diese entfallen über 90% der von dem gesamten Finite-Elemente-Modell verbrauchten CPU- und IO-Zeiten.

Als gemeinsames *Konvergenzkriterium* für die Iterationen (4.17) und (4.18) wurde gefordert, daß für zwei aufeinanderfolgende Iterationen die Bedingung

$$|\delta_{\alpha}| = \frac{|\Psi_{\alpha}^{\nu+1} - \Psi_{\alpha}^{\nu}|}{|\Psi_{\alpha}^{\nu}|} < 5 \cdot 10^{-2}$$

getrennt für $\alpha = \{u, v, w, \vartheta, p\}$ erfüllt wurde, d.h. im einzelnen

$$|\delta_u| = \sqrt{\frac{\sum_{I=1}^M (u_I^{\nu+1} - u_I^{\nu})^2}{\sum_{I=1}^M (u_I^{\nu})^2}} < 5 \cdot 10^{-2}$$

entsprechend für $|\delta_v|$, $|\delta_w|$ und $|\delta_{\vartheta}|$ sowie

$$|\delta_p| = \sqrt{\frac{\sum_{I=1}^M (p_I^{\nu+1} - p_I^{\nu})^2}{\sum_{I=1}^M (p_I^{\nu})^2}} < 5 \cdot 10^{-2}$$

worin wieder M die Gesamtzahl der Knotenpunkte und $\mathcal{M}$ die Zahl der Eckpunktknoten ist.

Wenn die *NEWTON-RAPHSON*-Iteration überhaupt konvergiert, dann konvergiert sie i.a. sehr schnell. Wie z.B. in [41] gezeigt wird, ist die Konvergenz quadratisch in dem Sinne, daß für je zwei auf-

einanderfolgende Iterationszyklen mit den Abweichungen

$$\epsilon^{\nu} = \Psi - \Psi^{\nu}$$

und

$$\epsilon^{\nu+1} = \Psi - \Psi^{\nu+1}$$

von der wahren Lösung Ψ gilt:

$$|\epsilon^{\nu+1}| = O\{|\epsilon^{\nu}|^2\}$$

Dieses Konvergenzverhalten konnte in fast allen numerischen Experimenten der vorliegenden Arbeit verifiziert werden.

Graduell konnte die Konvergenzgeschwindigkeit erheblich dadurch verbessert werden, daß in (4.17) bzw. (4.18) anstelle der vorangegangenen Näherung Ψ^{ν} jeweils ein gewichtetes Mittel der beiden vorangegangenen Näherungen genommen wurde. Dasselbe galt für die nachiterierten Viskositäten in (4.18), die ebenfalls gemäß (2.4-9,10) aus einem gewichteten Mittel der jeweils vorangegangenen beiden Näherungen berechnet wurden. Das in dieser Weise gegenüber (4.18) optimierte Iterationsschema lautet also

$$\begin{aligned} \Psi^{\nu+1} \cdot \left[\frac{\partial M_1}{\partial \Psi} \cdot \Psi^{\nu, \sigma_1} + M^T(\Psi^{\nu, \sigma_1}, K_{M,1}^{\nu}(\Psi^{\nu, \sigma_2})) \right] = \\ = f + \Psi^{\nu, \sigma_1} \cdot \frac{\partial M_1}{\partial \Psi} \cdot \Psi^{\nu, \sigma_1} \end{aligned}$$

mit $\Psi^{\nu, \sigma_i} = (1 - \sigma_i) \Psi^{\nu-1} + \sigma_i \Psi^{\nu}$

$$0 < \sigma_i < 1 \quad (i = 1, 2)$$

Im Verlauf der Experimentreihen stellte sich heraus, daß sich optimale Werte σ_1 und σ_2 nicht verbindlich angeben lassen, weil diese offenbar von den physikalischen Bedingungen, insbesondere von $v_{h,9}$, γ_9 , $\vartheta(x, h(x)) = f(x)$ abhängen. Als Richtwerte können aber

$$\sigma_1 = 0.65 \quad \text{bis} \quad 0.70$$

$$\sigma_2 = 0.40 \quad \text{bis} \quad 0.50$$

gelten, da sich mit ihnen in den weitaus meisten Simulationen die geringste Gesamtzahl von *NEWTON-RAPHSON*-Iterationen ergab. Abgesehen von der Optimierung der Konvergenzgeschwindigkeit erwies sich die Verwendung des Mittels Ψ^{ν, σ_2} für die $K_{M,1}^{\nu}$ -Berechnung als notwendig, um überhaupt Konvergenz zu gewährleisten.

DIE LINEARE STARTNÄHERUNG

Wegen ihrer Eigentümlichkeit verdient die lineare Startnäherung für die *NEWTON-RAPHSON*-Iteration drei Anmerkungen. Sie ist die approximative Lösung des linearen Systems, das aus dem Modellgleichungssystem (2.13) durch Streichung sämtlicher Advektionsterme und speziell für $K_M = K_M^0 = \text{const}$ ($K_M = K_M$) entsteht, d.h. Lösung von

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\epsilon R_0} v &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{K_M^0}{\epsilon Re} \left(\epsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{\epsilon R_0} v_3 \\ \frac{1}{\epsilon R_0} u &= \frac{K_M^0}{\epsilon Re} \left(\epsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{\epsilon R_0} u_3 \\ 0 &= -\frac{1}{\epsilon^2} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{K_M^0}{\epsilon Re} \left(\epsilon^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{Gr}{\epsilon^2 Re^2} \frac{v}{\theta_0} \\ \left(1 - \frac{g_3}{g_i} \right) w &= \frac{K_M^0}{\epsilon Pr Re} \left(\epsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

▷ Die erste Anmerkung betrifft den Iterationsalgorithmus. Das System (4.19) braucht nicht separat gelöst zu werden, denn seine Lösung ist gleichermaßen eine Lösung des *NEWTON-RAPHSON*-Hilfssystems (4.17.1) für den Startvektor $\Psi^0 = 0$. Für ihn reduziert sich (4.17.1) nämlich auf

$$M_2 \cdot \Psi^1 = f$$

und hierin ist M_2 gemäß ihrer Definition durch $M = M_1(\Psi) + M_2$ gerade die Gesamtmatrix des zu (4.19) gehörigen *GALERKIN*-Systems.

▷ Zum zweiten soll noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen werden, daß die "Lösung" von (4.19) physikalisch völlig bedeutungslos ist, ebenso wie etwa der Startvektor $\Psi = 0$. Dies allein schon wegen des physikalisch irrelevanten Anfangswertes $K_M^0 = 600 \text{ m}^2/\text{sec}$, der zur Einleitung der ersten Phase (4.17.1) des *NEWTON-RAPHSON*-Algorithmus erforderlich war. Die Abb. 17 a zeigt, daß sowohl die nach (2.18) berechnete Anströmung $w_n(0, z)$ als auch die Innenlösung in weiterer Entfernung von der Bergtopographie wegen dieses hohen K_M^0 -Wertes praktisch zu einer *schleichenden* Strömung mit *COUETTE*-ähnlichem $u(z)$ -Profil entartet ist. Der Vergleich der Abbildungen 17 a und 17 b illustriert noch einmal die Ursache der Notwendigkeit des Hilfsalgorithmus (4.17) mit dekrementierten

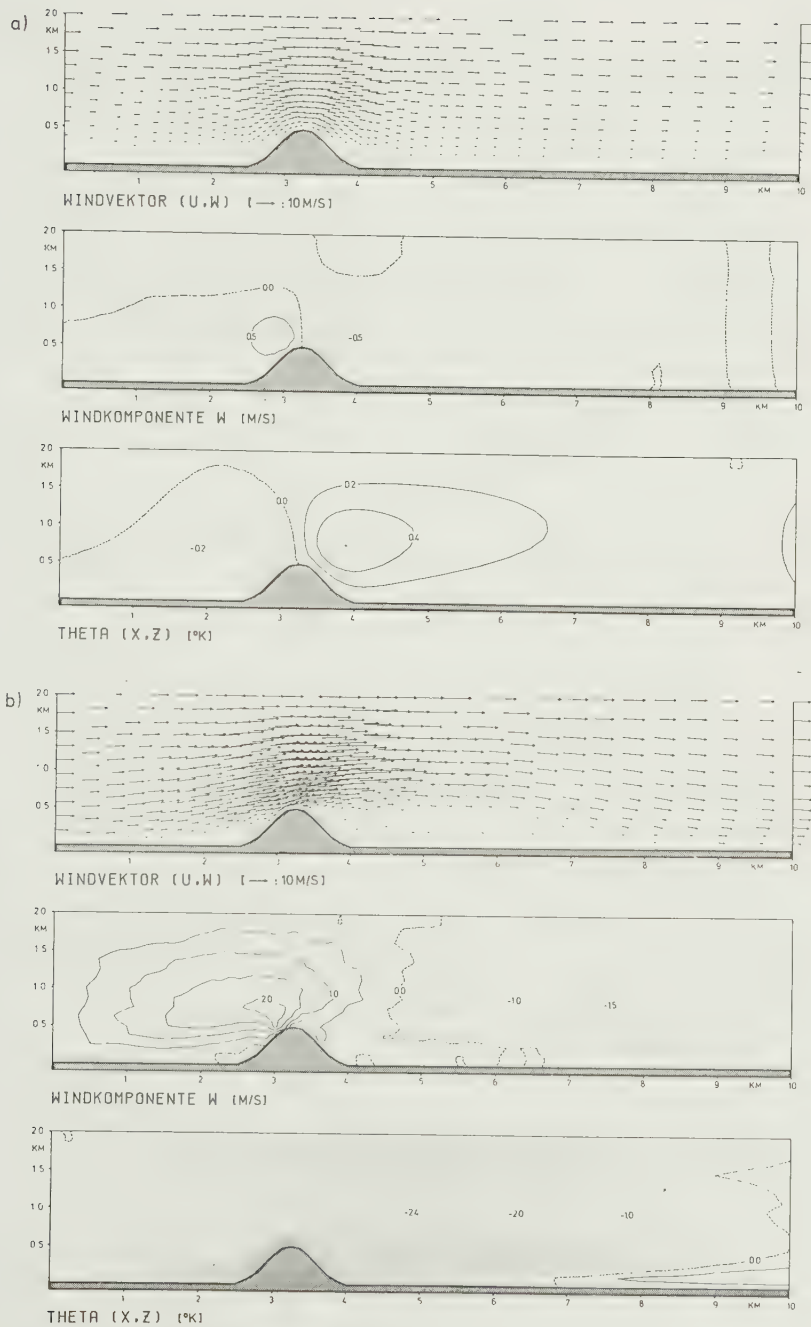


Abb. 17 : Vergleich zwischen

- a) der linearen Startnäherung (schleichende Strömung) für die NEWTON-RAPHSON-Iteration und
 b) der Lösung des vollständig nichtlinearen Systems
 ($|v_{h,g}| = 10 \text{ m/sec}$, $\gamma_g = 0.50 \text{ K/100m}$)

und jeweils räumlich konstanten Viskositäten, um von ψ^0 aus Anschluß an eine konvergente *NEWTON - RAPHSON* - Iteration für das endgültige *GALERKIN* - System (3.18) zu erreichen. Die lineare "Lösung" (Abb. 17 a) ist zwar schon weit besser als der Startvektor $\psi = 0$, hat andererseits aber überhaupt noch keine Ähnlichkeit mit der Lösung des vollständig nichtlinearen Systems mit rückkoppelnd berechneter K_M - Verteilung (Abb. 17 b).

▷ Die dritte Bemerkung betrifft das Paradoxon, daß es trotz des hohen K_M^0 - Anfangswertes *überhaupt* eine approximative Lösung des Systems (4.19) für die gegebene Modellgeometrie gibt. Wegen der topographiebedingten Änderung des Strömungsquerschnittes ist von vornherein klar, daß es für beliebige Anströmung $v(0, z)$ und zusätzlich unter dem Zwang der Inkompressibilitätsbedingung überhaupt kein trägheitsbeschleunigungsfreies Windfeld geben kann. Ebenso wenig ist das bei Anwesenheit thermischer Konvektion infolge lokaler Temperaturstörungen möglich. Trotzdem liefert aber das zugeordnete *GALERKIN* - System approximative Lösungen, die somit im offenkundigen Widerspruch zu ihren physikalischen Voraussetzungen der Trägheitsbeschleunigungs- und Temperaturadvektionsfreiheit stehen.

Dieses Paradoxon ist schon in der klassischen Hydrodynamik in Gestalt der *STOKES*schen Lösung für die Kugelumströmung verbürgt. *WIEGHARDT* [73] nennt diese Lösung einen "glücklichen Zufall" und weist darauf hin, daß im Fall der *ebenen* Umströmung die vollständige Vernachlässigung der Trägheitsglieder (*STOKES*sche Linearisierung) auf eine Randwertaufgabe führt, die mathematisch keine sinnvolle stetige Lösung besitzt.

Der Verfasser der vorliegenden Arbeit glaubt, die Existenz solcher approximativen Lösungen des Systems (4.19), wie z.B. der in Abb. 17 a gezeigten, mit Hilfe des folgenden geometrischen Analogons erklären zu können: Die Aufgabe, den Schnittpunkt zweier windschiefer Geraden zu bestimmen, besitzt definitionsgemäß keine exakte Lösung. Trotzdem läßt sich aber eine sinnvolle Approximationslösung finden, wenn diese im Sinne eines Fehlerminimierungskriteriums definiert wird. Fragt man nämlich in Abschwächung des exakten Problems nach demjenigen Punkt, für den die Summe der Abstände zu beiden Geraden minimal ist, dann liefert die zugehörige Extremwertaufgabe eine eindeutige Lösung. Die Analogie zum vorliegenden Problem ist dadurch gesichert, daß es für das Prinzip der Gewogene - Residuen - Methode belanglos ist, ob überhaupt eine Lösung existiert, die das Residuum exakt zum Verschwinden bringt oder ob dieses eine von Null verschiedene untere Schranke besitzt. Auch für das System (4.19) existiert auf dem gegebenen Integrationsgebiet keine exakte Lösung. Trotzdem ergibt sich aus der Forderung der Residuenminimierung eine sinnvolle Approximation, die eine für die *NEWTON - RAPHSON* - Iteration brauchbare erste Näherung des trägheitsbeschleunigungsbehafteten Strömungsfeldes darstellt. Man kann also sagen, daß durch Abschwächung der ursprünglichen Forderung nach exakter Integrierbarkeit auf diejenige einer Residuenminimierung eine "allgemeinere Klasse von Lösungen" eröffnet wird.

4.3 BERECHNUNG DER ABLEITUNGEN AN DEN KNOTENPUNKTEN

Zur Bezeichnung in diesem Abschnitt: "e" ist *Elementsummenindex*, "ε" der aktuelle *Elementname*.

Sowohl zur Auswertung der Parameterisierungsbeziehungen (2.4-9,10) für die turbulente Viskosität als auch für die Beschleunigungsanalyse (s.u. S 153) werden Ableitungen der berechneten Variablenfelder nach den Ortskoordinaten x und z benötigt. Werden solche Ableitungen im Innern eines Elements gebraucht, wie z.B. an den GAUSS-Punkten für die numerische Quadratur der Elementbeitragsintegrale, dann gibt es wegen der stetigen Approximationsfunktionen (3.2) für alle Variablen über dem Element keine Probleme, denn für jeden inneren Punkt $\mathbf{r}^\epsilon$ ist z.B. einfach

$$\frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial x}(\mathbf{r}^\epsilon) =: \frac{\partial \hat{\Psi}^\epsilon}{\partial x}(\mathbf{r}^\epsilon) = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i^\epsilon}{\partial x} \psi_i^\epsilon \quad (4.20)$$

Anders ist das, wenn Ableitungen auf dem Elementrand, insbesondere an den Knotenpunkten benötigt werden, wie etwa für die Berechnung der $K_{M,i}^\epsilon$. Die gemäß (1.16) aus den Elementapproximationen (3.2) zusammengesetzten globalen Interpolationsfunktionen sind zwar auf dem gesamten Integrationsgebiet stetig, besitzen jedoch keine stetigen Ableitungen auf den Elementrändern. Wird z.B. am globalen

Knotenpunkt "K" die Ableitung $\frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial x}$ benötigt, dann kann sie zwar nach (4.20) aus den Interpolationsfunktionen aller Elemente berechnet werden, denen dieser Knotenpunkt angehört. Diese Ableitungen werden jedoch i.a. voneinander abweichen, und zwar in Abhängigkeit von der Auflösung der gewählten Elementdiskretisierung. An Knotenpunkten in Gebieten starker Gradienten der Lösungsfelder können repräsentative Ableitungen aller Variablen daher nur als geeignete Mittel definiert werden.

In der vorliegenden Arbeit wurde die Ableitung $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ (entsprechend $\frac{\partial \Psi}{\partial z}$ und alle zweiten Ableitungen) an einem Knotenpunkt "K" definiert als gewichtetes Mittel über die nach (4.20) aus den Elementapproximationen $\hat{\Psi}^\epsilon$ berechneten Ableitungen in allen Elementen, denen dieser Knotenpunkt angehört, d.h.

$$\left. \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial x} \right|_K =: \sum_{e=1}^{E(K)} g^e \left. \frac{\partial \hat{\Psi}^e}{\partial x} \right|_K \quad (4.21)$$

$E(K)$ ist die Anzahl der Elemente, die den Knotenpunkt K enthalten. Die Annahme erscheint plausibel, daß eine Ableitung $\left. \frac{\partial \hat{\Psi}^\epsilon}{\partial x} \right|_K$ umso repräsentativer für den Knoten K ist, je kleiner das Element "ε" ist. Deshalb wurden die Gewichte g^e proportional den reziproken Flächeninhalten der Elemente definiert, d.h. $g^e =: \frac{\alpha}{F^e}$. Der Pro-

proportionalitätsfaktor α bestimmt sich aus der Normierungsforderung

$$\sum_{e=1}^{E(K)} g^e = 1 \quad \text{zu} \quad \alpha = \left[\sum_{e=1}^{E(K)} \frac{1}{F^e} \right]^{-1}. \quad \text{Damit ist}$$

$$q^e = \frac{\frac{1}{F^e}}{\sum_{e=1}^{E(K)} \frac{1}{F^e}} \quad (4.22)$$

Aus $df^e = J^e d\xi d\eta$ (vgl. (3.13)) folgt $F^e = J^e \int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=0}^{1-\xi} d\xi d\eta = \frac{1}{2} J^e$.

Damit und mit (4.22) lautet die endgültige Definition für die Ableitung am Knotenpunkt "K":

$$\frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial x} \Big|_K = \frac{\sum_{e=1}^{E(K)} \frac{1}{J^e} \frac{\partial \hat{\Psi}^e}{\partial x} \Big|_K}{\sum_{e=1}^{E(K)} \frac{1}{J^e}} = \frac{\sum_{e=1}^{E(K)} \frac{1}{J^e} \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \Big|_K \Psi_i^e}{\sum_{e=1}^{E(K)} \frac{1}{J^e}} \quad (4.23)$$

Analoge Berechnungsvorschriften gelten für $\frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial z}$, $\frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial z^2}$ und $\frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial x \partial z}$.

5. DIE ERGEBNISSE DER MODELLEXPERIMENTE

5.1 ÜBERSICHT ÜBER DAS NUMERISCHE EXPERIMENTPROGRAMM

In der Einleitung ist die Entscheidung zur Konstruktion eines *stationären* Simulationsmodells begründet worden. Im Hinblick auf spätere Anwendungen steht mit ihm z.B. ein sehr schnelles Zuliefermodell für den hydrodynamischen Anteil von Ausbreitungsrechnungen zur Verfügung. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit ist die rechenzeitmäßige Überlegenheit der stationären Modellierung gegenüber der instationären Iteration zur Gewinnung stationärer Lösungen dazu genutzt worden, ein sehr umfangreiches Experimentprogramm durchzuführen. Das Ziel war dabei, die qualitative und quantitative Abhängigkeit charakteristischer stationärer Strömungserscheinungen über steiler Topographie von ihren wichtigsten Einflußgrößen mit Hilfe einer ausreichenden Zahl von Stützstellenexperimenten im "Raum dieser Parameter" untersuchen zu können. Zur systematischen Variation wurden hierfür folgende fünf Einflußgrößen bzw. -funktionen zugelassen:

$$\begin{aligned} & |\mathbf{v}_{h,q}|, \quad \mathbf{v}_{h,q}^{\circ} \\ & \vartheta(x, z = h(x)) \\ & \theta_o(z) \text{ bzw. } \gamma_q = -\frac{\partial T_o}{\partial z} \\ & z = h(x), \end{aligned}$$

d.h. Stärke und Richtung des dynamischen Antriebs, vertreten durch die aufgeprägte Druckbeschleunigung $-\frac{1}{\rho_o} \nabla_h p_o = f \mathbf{k} \times \mathbf{v}_{h,q}$, der durch die Bodentemperatur(störungs)verteilung $\vartheta(x, z = h(x))$ vermittelte thermische Antrieb, die durch $\theta_o(z)$ bzw. γ_q gegebene thermische Schichtung im Referenzzustand der ungestörten Anströmung und die Neigung des Topographieprofils $z = h(x)$.

Der Betrag des geostrophischen Windvektors $\mathbf{v}_{h,q}$ wurde im Wertebereich $4 \text{ m/s} \leq |\mathbf{v}_{h,q}| \leq 20 \text{ m/s}$ variiert, seine Richtung bezüglich der Hangachsennormalen (x -Achse) im Wertebereich $-60^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ$. Die Schichtungsstabilität wurde im Intervall $\gamma_i (= g/c_p) \geq \gamma_q \geq 0$ variiert, d.h. für den ungestörten Referenzzustand wurden neutrale und stabile thermische Schichtungen bis hin zur Isothermie zugelassen. In einigen Experimenten wurden darüberhinaus Inversionen im Referenzzustand von geringer vertikaler Mächtigkeit mit $\gamma_q < 0$ vorgegeben. Ausgehend von den in den Abb. 13 a, 13 b dargestellten Topographien mit maximalen Hangneigungen von 45° wurden mit Hilfe von Koordinatentransformationen $\bar{x} = x(x)$, wie z.B. (3.1) für die Bergversion, verschiedene Profilformen mit größeren oder kleineren Luv- bzw. Leehangneigungen erzeugt. Für die numerischen Experimente zur freien und gemischten Konvektion wurden Temperaturstörungen auf den Hängen mit maximalen Amplituden von 4 K vorgegeben.

Im Verlauf der systematischen Parametervariation zeigte sich, daß die vom Modell simulierten Strömungserscheinungen über steiler Topographie (Leewellen, Grenzschichtablösungen mit Rückströmung im Anströmungslee, Blockierung mit Ablösung und Rotor im Luv und

Strömungsablösung incl. kräftiger Rotorbildung unter Leewellen) innerhalb gewisser Wertebereiche sehr sensibel von den aufgezählten Einflußgrößen abhängen. In solchen Fällen war es erforderlich, zusätzliche Experimentreihen mit einem jeweils nur geringfügig inkrementierten Parameter unter Konstanzhaltung der jeweils vier übrigen Einflußgrößen durchzuführen.

Die weitaus größte Zahl der numerischen Experimente dieser Arbeit ist mit der Bergtopographie durchgeführt worden. Hiervon entfiel ein großer Teil auf die Untersuchung des Einflusses der dynamischen Antriebsstärke ($|v_{h,g}|$) und der thermischen Schichtung des Referenzzustandes (γ_g) auf die Bergüberströmung. Für diese beiden Parameter war die größte Auflösung bezüglich der Variation erforderlich, weil die meteorologisch bedeutsamsten Phänomene (insbesondere die Leewellen und die, etwa für die Ausbreitung von Schadstoffkonzentrationen, noch wichtigeren Ablösungserscheinungen) so sensibel von $|v_{h,g}|$ und γ_g abhängen, daß zumindest in den Wertebereichen $5 \text{ m/s} \leq |v_{h,g}| \leq 10 \text{ m/s}$ und $0.80 \geq \gamma_g \geq 0.20 \text{ K/100 m}$ Inkrementierungen um jeweils 1 m/s bzw. 0.15 K/100 m notwendig wurden.

Eine weitere umfangreiche Experimentreihe betraf die Variation der Anströmungsrichtung, die aus der Richtung der Antriebsbeschleunigung $f \times v_{h,g}$ resultiert. Hierbei war eine Beschränkung auf eine Referenzstärke des dynamischen Antriebs ($|v_{h,g}| = 10 \text{ m/s}$) und zwei Schichtungsstabilitäten ($\gamma_g = 0.65$ und 0.20 K/100 m) erforderlich, um die aus der systematischen Variation aller fünf Einflußgrößen resultierende Zahl der Experimente zu begrenzen. Aus demselben Grund mußten auch die Experimente für verschiedene Luv- und Lee-hangneigungen auf die genannten Referenzwerte von $|v_{h,g}|$ und γ_g beschränkt werden. Die Experimente zur Bodentemperaturverteilung wurden schließlich mehr oder weniger stichprobenartig durchgeführt. Die meisten davon betrafen die freie Konvektion als Folge lokaler Bodenerwärmung oder -abkühlung. Einige Simulationen gemischter Konvektion dienten der Untersuchung des Einflusses von Hangthermik auf die Leewellenstruktur bzw. die Grenzschichtablösung im Lee.

Die aus diesem Programm hervorgegangene große Gesamtzahl von Einzelsimulationen erlaubt nur summarische und exemplarische Ergebnisdarstellungen. Um der Methodik der numerischen Experimentreihen trotz-dem Rechnung zu tragen, ist es sinnvoll, die Ergebnisdarstellung bzw. -diskussion nach irgendeinem Ordnungsprinzip auszurichten. Zwei einleuchtende Ordnungsprinzipien resultieren aus der Phänomenologie einerseits und formal aus der Parametervariation auf der anderen Seite. Zweifellos wäre es am reizvollsten, phänomenologisch vorzugehen und die Ergebnisse zur systematischen Diskussion der Abhängigkeiten einzelner charakteristischer Strömungserscheinungen auszuwerten. Dieser Ansatz erweist sich jedoch als schwer durchführbar, weil es in gewissen Wertebereichen der Variationsparameter zu starken wechselseitigen Beeinflussungen der verschiedenen Phänomene kommt. Ein Beispiel hierfür ist die durch die Leewellenphase bezüglich des Berges bedingte Behinderung bzw. vollständige Unterdrückung der Grenzschichtablösung über und hinter dem Lee-hang. Ebenso können umgekehrt die welleninduzierten Ablösungen und Rotorbildungen nicht isoliert von den Leewellen diskutiert werden.

Deshalb wurden im folgenden die Ergebnisse mehr formal unter dem Gesichtspunkt der jeweils variierten Parameter geordnet. Eine qualitative und quantitative Diskussion der für die meteorologische Praxis wichtigen Erscheinungen ergibt sich dabei zwanglos.

5.2 DIE EXPERIMENTE MIT DER BERGTOPOGRAPHIE

DER EINFLUSS VON $|v_{h,g}|$ UND γ_g AUF DIE BERGÜBERSTRÖMUNG

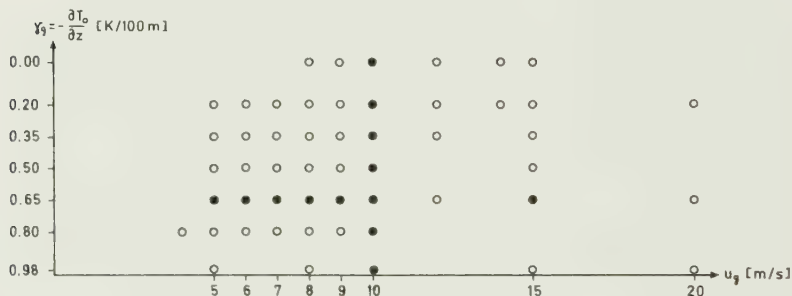
Abgesehen von der Untersuchung des Einflusses verschiedener Anströmrichtungen wird immer $v_{h,g} = u_g i$ vorausgesetzt, so daß $|v_{h,g}| = u_g$ ist.

Von ihren jeweiligen Ursachen her ist klar, daß die wichtigsten charakteristischen Strömungserscheinungen über steiler Topographie maßgeblich von der Stärke der aufgeprägten Druckbeschleunigung, d.h. vom Betrag des geostrophischen Windvektors, und von der thermischen Schichtung des Referenzzustandes der ungestörten Anströmung abhängen. Im Fall der Leewellen wird das schon in den linearen Theorien (zur Übersicht s. z.B. [56]) durch die in verschiedener Weise vereinfachten Leewellengleichungen für stationäre reibungsfreie Strömung ohne Berücksichtigung der *CORIOLIS*-Beschleunigung verdeutlicht. Das vom Auslösungsmechanismus unabhängige Eigenverhalten der gestörten Strömung wird dort jeweils durch einen einzigen Parameter beherrscht. Dieser hängt im Fall der gleichförmigen Anströmung (Einschichtenmodell) nur von der Anströmungsgeschwindigkeit und der Schichtungsstabilität ab. Zwar läßt sich diese einfachste Parameterisierung im Zusammenhang mit den Randbedingungen $w(0) = 0$, $w(H \rightarrow \infty) = 0$ nicht halten, jedoch erweist sich auch in der erweiterten Theorie mit Berücksichtigung vertikaler Windscherung und höhenabhängiger Schichtung, daß das Einsetzen und die Struktur von Leewellen wiederum von einem einzigen Parameter gesteuert wird, auf dessen Vertikalprofil es dann ankommt. In einfachster Form ist dies der in der Wellengleichung $\frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + (l^2(z) - k^2)w = 0$ auftretende "SCORER-Parameter" $l^2(z) = \frac{g(\gamma_1 - \gamma_g)}{T_0} \frac{1}{U^2} - \frac{1}{U} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$, der sich aus dem ungestörten Anströmprofil $U(z)$ und der Schichtungsstabilität γ_g konstituiert.

Aber auch die im Luv und im Lee eines hinreichend steilen Hindernisses auftretenden Grenzschichtablösungen sowie die welleninduzierten Ablöseerscheinungen mit Rückströmung bzw. Rotorbildung hängen maßgeblich von den beiden Parametern u_g und γ_g ab. Sie sind nämlich stets eine Folge von Stördruckgradienten in Richtung der An- bzw. Überströmungsrichtung. Gleich, ob diese lokalen Druckgradienten durch dynamische oder hydrostatische Druckstörungen induziert werden, hängen sie immer maßgeblich ab von der Windstärke und der thermischen Schichtung oberhalb der Reibungsschicht. Das wird im Fall dynamisch bedingter Druckstörungen sowohl an der Gleichung für Druckänderungen in Stromlinienrichtung (*BERNOULLI*-Gleichung) als auch an derjenigen für transversale Druckänderungen (Zentrifugalbeschleunigungen als Ursache für transversale Druck-

änderungen) klar. Im Fall des thermisch bedingten Stördruckanteils ist die Schichtungsabhängigkeit implizit über die hydrostatische Beziehung zwischen Temperatur- und Druckstörungen gegeben, denn welleninduzierte Temperaturstörungen werden im wesentlichen durch Wellenamplitude und Schichtungsstabilität bestimmt.

Zur numerisch-experimentellen Untersuchung des Einflusses von u_g und γ_g auf die Bergüberströmung sind mit dem vorliegenden Modell 52 Simulationen für verschiedene Parameterkombinationen in den Wertebereichen $4 \leq u_g \leq 20 \text{ m/s}$, $\gamma_g \geq 0$ durchgeführt worden. Das folgende Diagramm zeigt die dadurch für die Auswertung gewonnene Stützstellenverteilung in der $\{u_g, \gamma_g\}$ -Parameterebene:



Vom Aufwand her ist verständlich, daß eine solche Stützstellendichte nur für *eine* Anströmrichtung ($\mathbf{v}_{h,g} = \mathbf{i}$) und *ein* Topographieprofil - und zwar das in Abb. 13a dargestellte symmetrische mit maximalen Hangneigungen von 45° - realisiert werden konnte.

Die eindrucksvollste Ergebnisdokumentation wäre, von Stützstelle zu Stützstelle entlang der Linien $u_g = \text{const}$ bzw. $\gamma_g = \text{const}$ sämtliche Lösungsfelder zu präsentieren. Das führte jedoch zu einer unvertretbaren Abbildungsfülle. Da sich aber andererseits die Anschaulichkeit vektorieller und skalarer Felddarstellungen durch summarische Diagramme und Tabellen niemals befriedigend ersetzen läßt, soll hier ein Kompromiß angeboten werden: Für zwei ausgewählte Experimentfolgen sollen jeweils das Vektorfeld der Windkomponente $u\mathbf{i} + w\mathbf{k}$ sowie die durch Isoliniendarstellungen repräsentierten Verteilungen der Windkomponenten u , v , w und der Temperaturstörung ϑ (zusammen mit der gesamten potentiellen Temperatur $\theta = \theta_0 + \vartheta$) unmittelbar aufeinanderfolgend abgebildet werden. Als solche durch charakteristische Parameterwerte ausgezeichnete Serien werden die im obigen Diagramm durch ausgefüllte Kreise hervorgehobenen Experimente ausgewählt. Es ist also zum einen die Folge von Simulationen der Überströmung bei der charakteristischen Schichtungsstabilität $\gamma_g = 0.65 \text{ K/100 m}$ und verschiedenen dynamischen Antriebsstärken (u_g variiert), die in den Abbildungen 18.1-18.7 gezeigt wird, zum anderen die von den Simulationen mit $u_g = 10 \text{ m/s}$ und variiert Schichtungsstabilität gebildete Folge (Abbildungen 23.1-23.7).

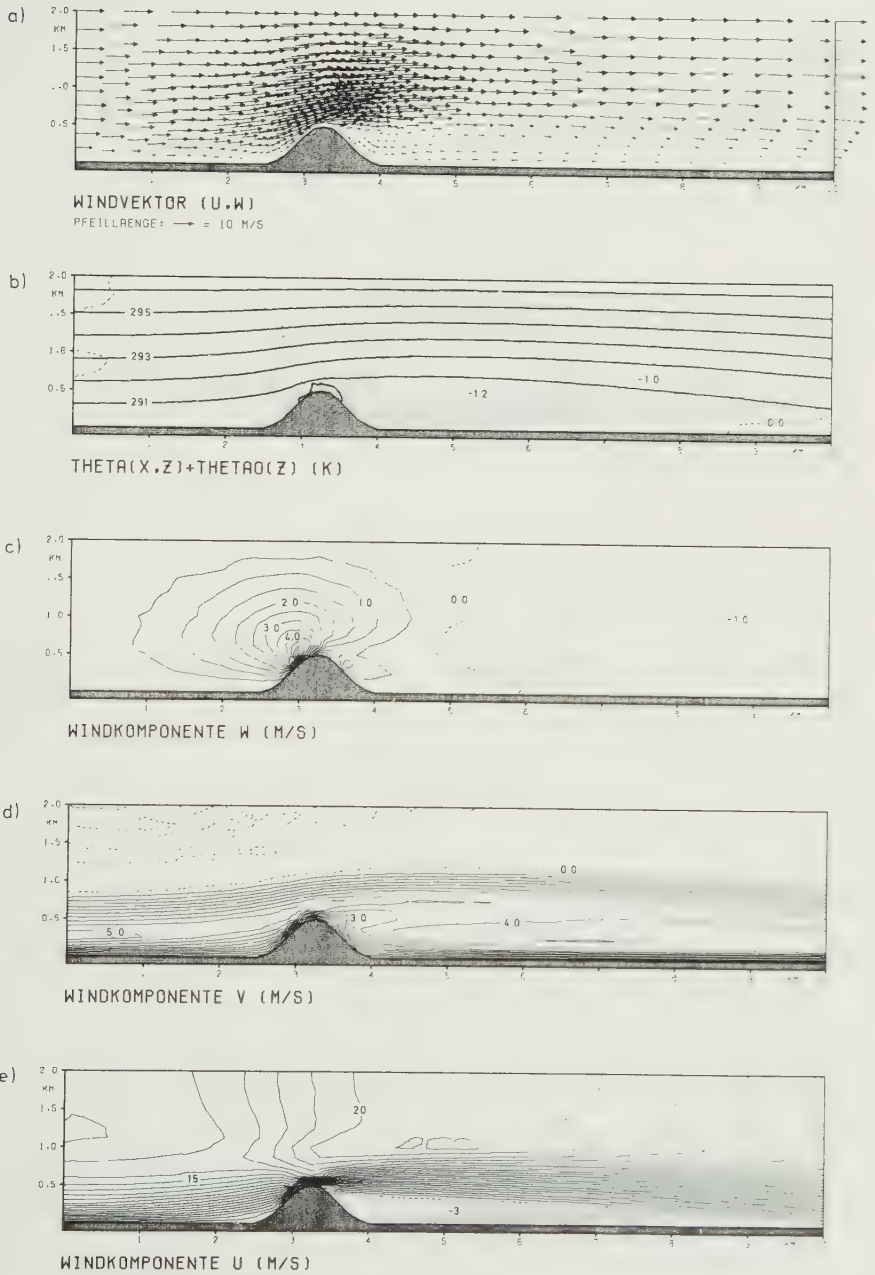


Abb. 18.1 : Serie u_g - Variation mit $\gamma_g = 0.65 \text{ K}/100 \text{ m}$
 $u_g = 15 \text{ m/sec}$

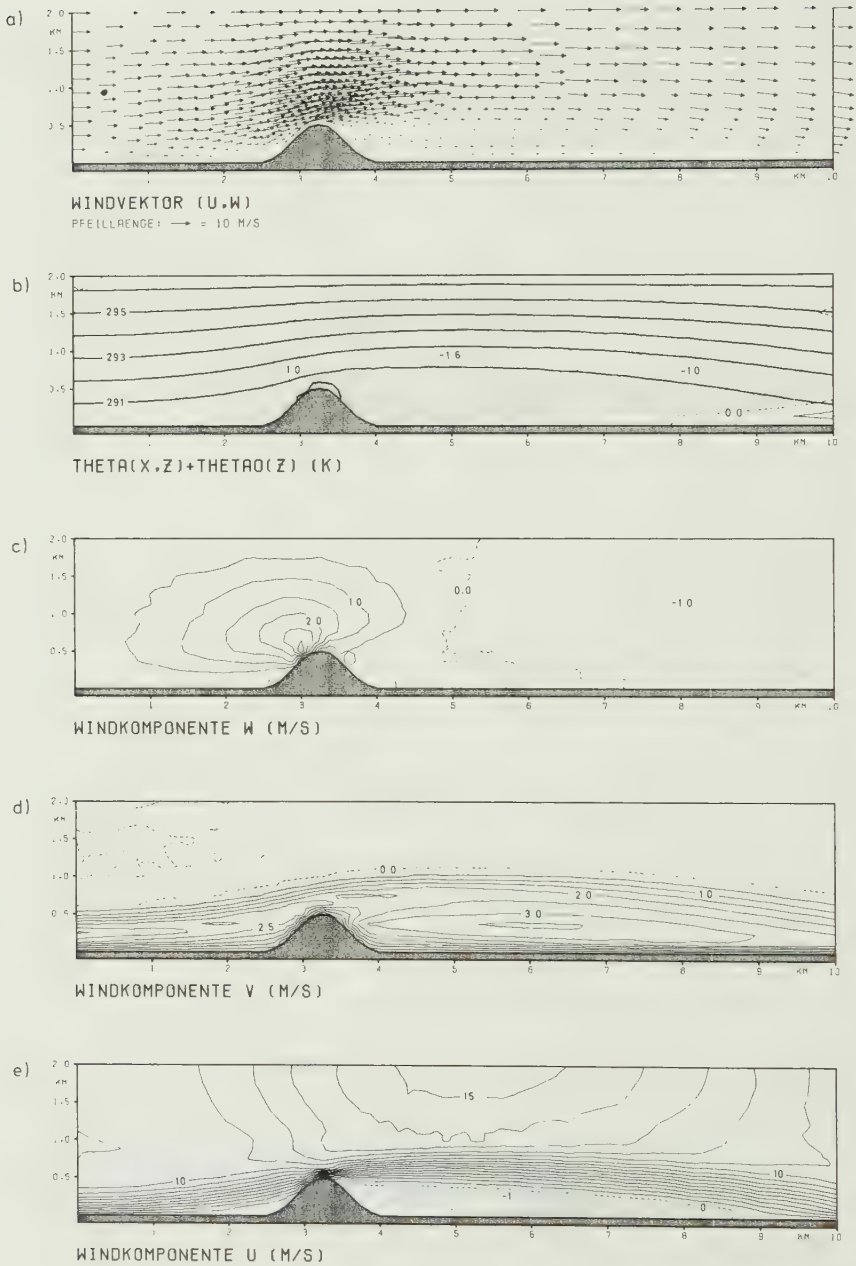


Abb. 18.2 : Serie u_g - Variation mit $\gamma_g = 0.65 \text{ K/100 m}$
 $u_g = 10 \text{ m/sec}$

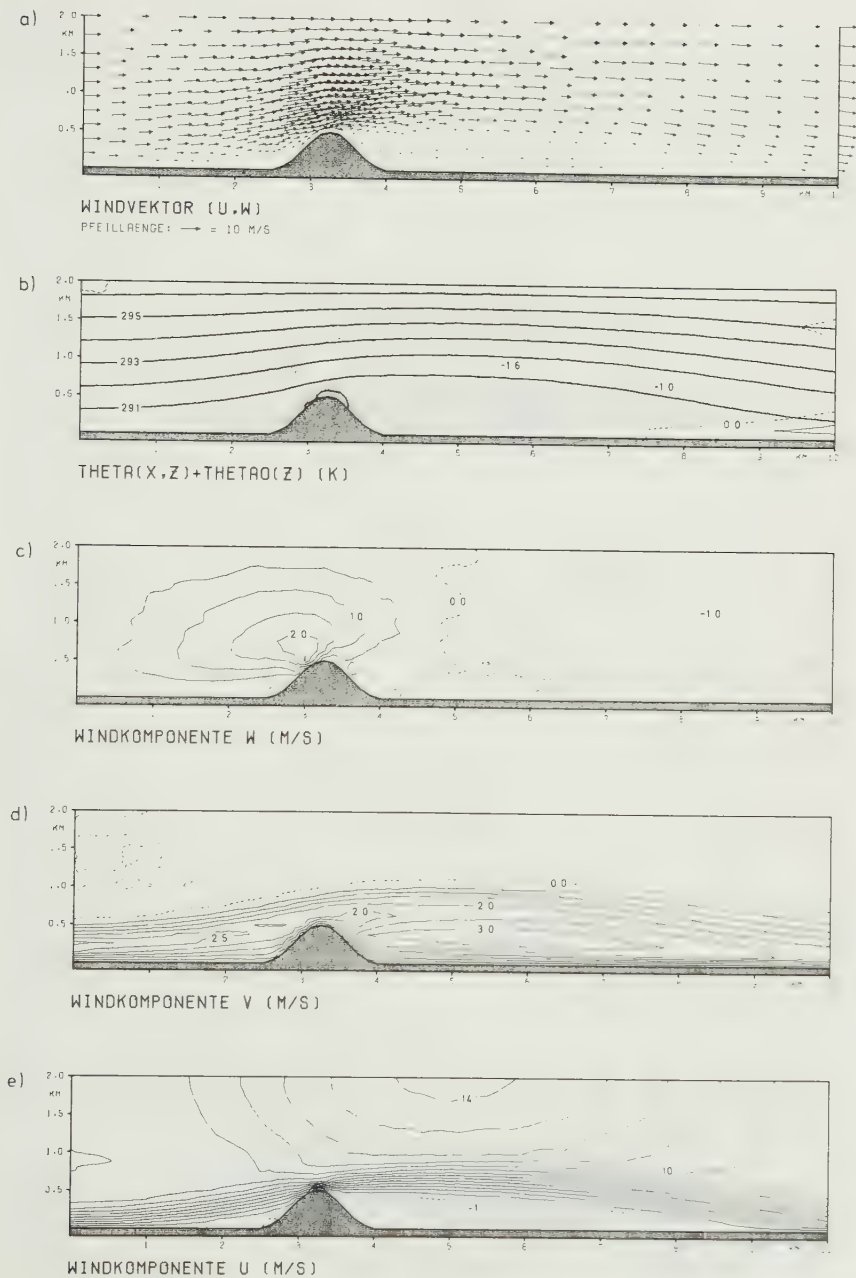


Abb. 18.3 : Serie u_g - Variation mit $\gamma_g = 0.65 \text{ K}/100\text{m}$
 $u_g = 9 \text{ m/sec}$

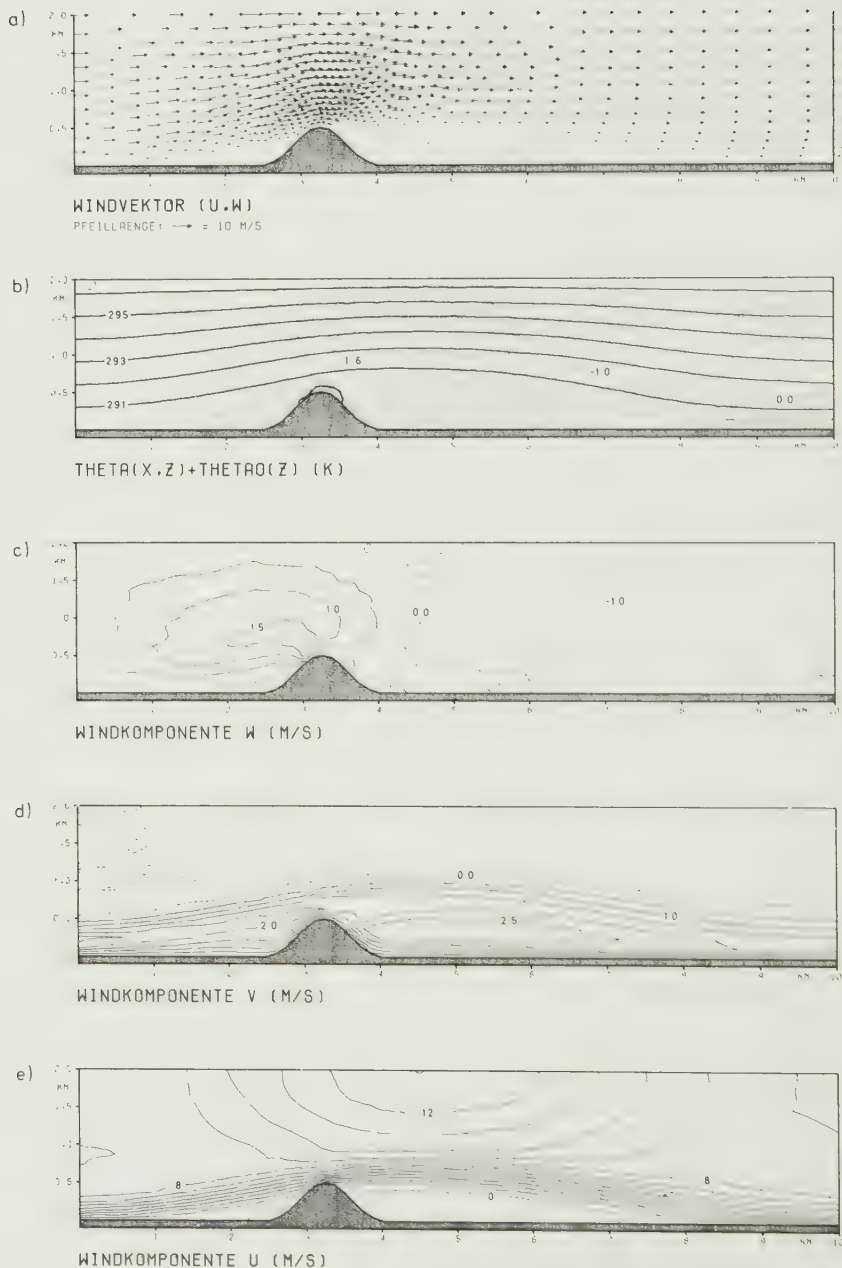


Abb. 18.4 : Serie u_z - Variation mit $\gamma_g = 0.65 \text{ K/100 m}$
 $u_g = 8 \text{ m/sec}$

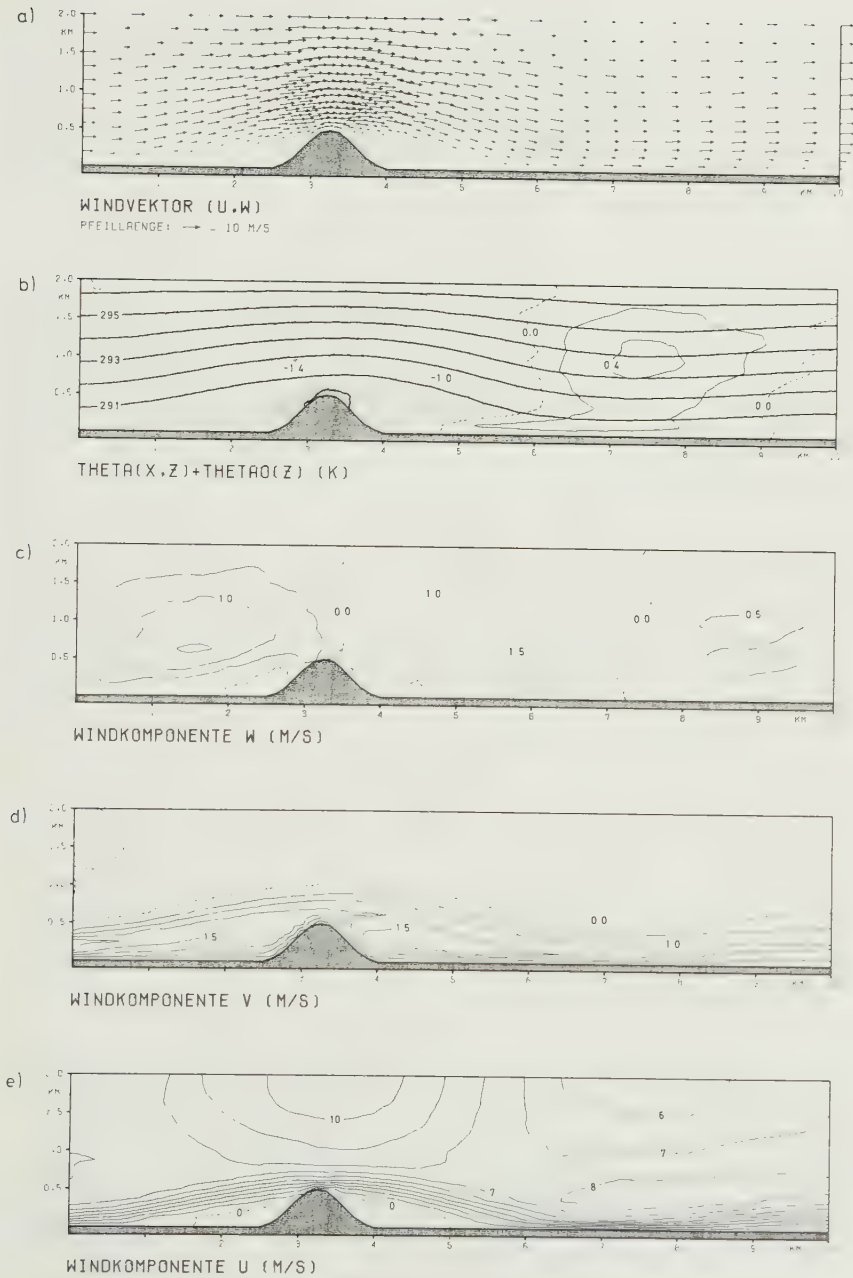


Abb. 18.5 : Serie u_g - Variation mit $\gamma_g = 0.65 \text{ K}/100 \text{ m}$

$$u_g = 7 \text{ m/sec}$$

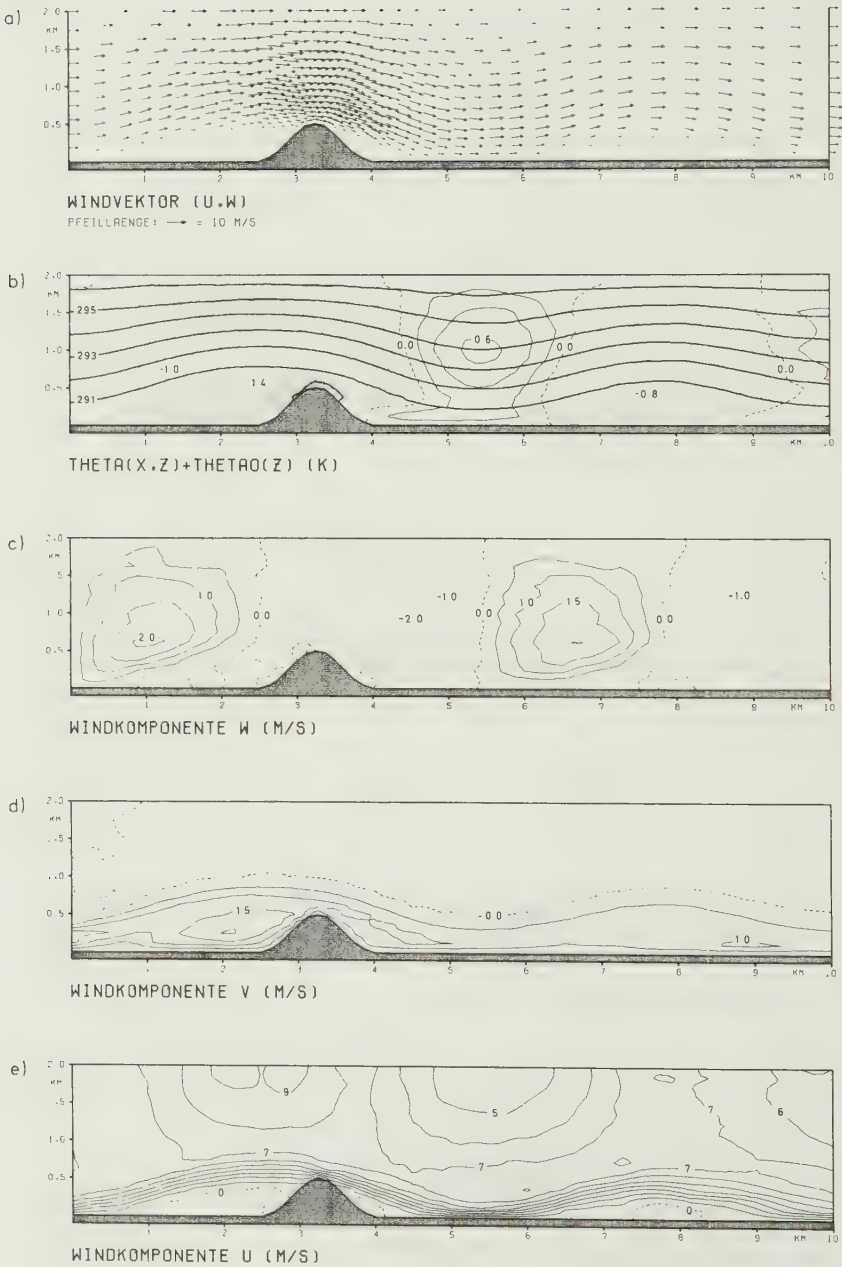


Abb. 18.6 : Serie u_g - Variation mit $\gamma_g = 0.65 \text{ K}/100\text{m}$
 $u_g = 6 \text{ m/sec}$

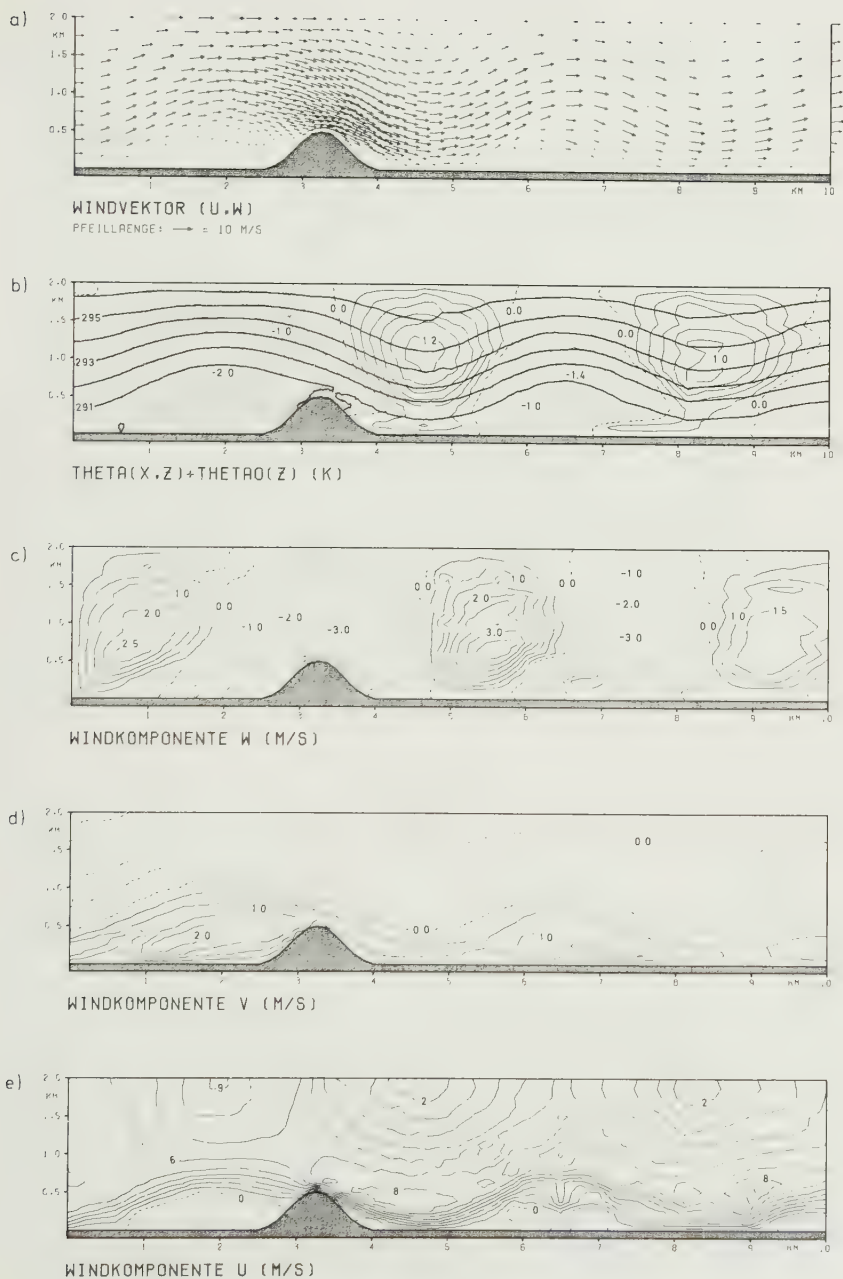


Abb. 18.7 : Serie u_2 - Variation mit $\gamma_2 = 0.65 \text{ K}/100 \text{ m}$
 $u_2 = 5 \text{ m/sec}$

Die Abbildungsserie 18.1-7 zur Variation von u_g bei konstant gehaltener Schichtungsstabilität $\gamma_g = 0.65 \text{ K}/100 \text{ m}$ ist fortschreitend von großen zu kleinen Antriebsstärken geordnet. Für die größeren Anströmgeschwindigkeiten ($u_g = 15$ und 10 m/s) sind die auffälligsten Befunde das gegenüber der Potentialströmung leewärts versetzte Windmaximum (s. Abb. 18.1,2 jeweils a) und e)) sowie die langgestreckte Grenzschichtablösung mit bodennaher Rückströmung im Lee. Für $u_g = 15 \text{ m/s}$ hat die Windkomponente u ihr Maximum von $21,2 \text{ m/s}$ etwa $2,1 \text{ km}$ im Lee hinter dem Berggipfel. Für $u_g = 10 \text{ m/s}$ liegt das u -Maximum von $15,6 \text{ m/s}$ in der gleichen Entfernung vom Gipfel.

Die leeseitige Grenzschichtablösung reicht etwa 5 km in Strömungsrichtung und bleibt in ihrer vertikalen Erstreckung auf den Bereich unterhalb der Gipfelhöhe beschränkt. Für $u_g = 15 \text{ m/s}$ tritt eine maximale Rückströmung von $-3,6 \text{ m/s}$ auf, die sich für $u_g = 10 \text{ m/s}$ auf $-2,1 \text{ m/s}$ reduziert. Für Antriebsstärken $u_g > 15 \text{ m/s}$ verkürzt sich die Länge des Ablösegebietes trotz weiterer Intensivierung infolge des dann verstärkten vertikalen turbulenten Impulstransportes. Im Luv folgt die Strömung insbesondere für $u_g = 15 \text{ m/s}$ noch weitgehend der Bergkontur. Für $u_g = 10 \text{ m/s}$ deutet sich zwar schon ein Stau an, es tritt jedoch noch keine Ablösung ein. Auf die Grenzschichtablösungen und Rotoren wird weiter unten noch mehrfach näher eingegangen. Für $u_g = 10 \text{ m/s}$ soll aber schon hier die zugehörige Bodendruckkurve und im Vergleich dazu die entsprechende Druckverteilung am Boden für neutrale Schichtung gezeigt werden:

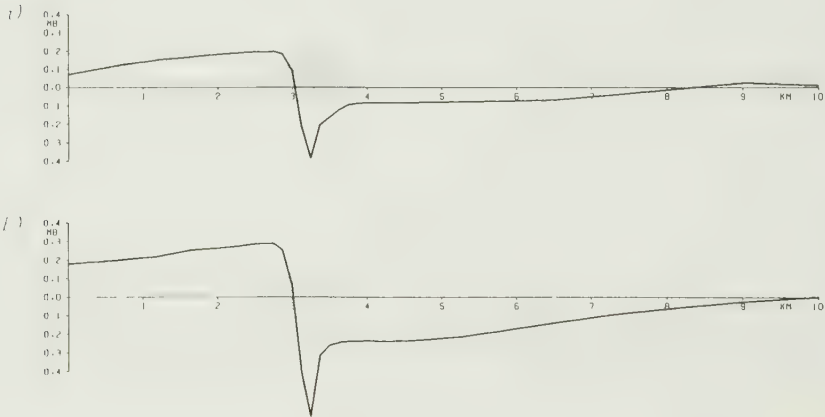


Abb. 19: Bodendruckstörung $p(x, z=h(x))$ für $u_g = 10 \text{ m/sec}$ und

a) $\gamma_g = 0.65 \text{ K}/100 \text{ m}$

b) $\gamma_g = \gamma_i = 0.98 \text{ K}/100 \text{ m}$

Diese qualitativ vertrauten Druckkurven (vgl. z.B. SOMA [63]) bzw. ihre Ursachen liefern den Schlüssel zum Verständnis sämtlicher für die Überströmung steiler Topographie charakteristischen Blockierungs- und Ablöseerscheinungen. Abb. 19 b zeigt für neutrale Schichtung die

durch Stau und durch abwärts gerichtete Zentrifugalbeschleunigungen bedingte Stördruckzunahme in Strömungsrichtung im Luv bis zu einem Maximum von 0,3 mb über dem Luvhang. Danach folgt der markante Druckfall mit einem Minimum von $p \approx -0,6$ mb über dem Gipfel, d.h. unterhalb der größten Stromliniendichte. Die Zunahme des Stördruckes zum Ausströmrand hin erfolgt auf einer Länge von etwa 2 km von der Leehangmitte aus verzögert. Das erklärt sich über die *BERNOULLI*-Gleichung daraus, daß das Windmaximum nicht direkt über dem Gipfel liegt, sondern etwa um diese Strecke leewärts versetzt ist. Am Ausströmrand stellt sich fast exakt $p=0$ ein.

Qualitativ hat die Bodendruckkurve für die Schichtungsstabilität $\gamma_1 = 0,65 \text{ K}/100 \text{ m}$ (Abb. 19 a) noch die gleiche Gestalt, doch ist hier deutlich der modifizierende Einfluß des hydrostatischen Stördruckanteils zu sehen, der aus der hebungsbedingten Abkühlung mit einem Extremum von $-1,6 \text{ K}$ etwa 2 km stromabwärts vom Gipfel resultiert (vgl. Abb. 18.2 b)). Da sich das Temperaturdefizit von knapp 2 km vor dem Gipfel bis fast zum Ausströmrand erstreckt, ist der hydrostatische Stördruckbeitrag fast im gesamten Gebiet positiv, so daß sich zumindest vom Gipfel ab leewärts das Bodendruckniveau gegenüber dem neutralen Fall hebt. Sowohl das Druckminimum als auch das Druckniveau unmittelbar im Lee liegen um etwa 0,2 mb höher als im neutralen Fall. Gegenüber diesem erreicht der Stördruck kurz vor dem Ausströmrand sogar geringe positive Werte von etwa 0,05 mb. Dieser Drucküberschuß von 0,08 mb muß ausschließlich thermisch bedingt sein, da die Strömung in diesem Gebiet schon wieder weitgehend trägheitsbeschleunigungsfrei ist (vgl. die Beschleunigungsanalyse S 153), d.h. er muß sich anhand der hydrostatischen Beziehung zwischen Temperatur- und Druckstörung verifizieren lassen, die in der Nähe des Auslaufgebietes sehr gut erfüllt ist. Für diesen Drucküberschuß am Boden gegenüber der Höhe H ergibt sich dann

$$\delta p \approx -g H \varrho_0 \frac{\overline{\Delta \theta}}{\theta_0}$$

Mit dem aus Abb. 18.2 b) bei $x=9 \text{ km}$ abzuschätzenden Wert $\overline{\Delta \theta} \approx -0,15 \text{ K}$ und mit $H=2000 \text{ m}$, $g=10 \text{ m/s}^2$, $\varrho_0=10^3 \text{ g/m}^3$, $\theta_0=290 \text{ K}$ ergibt sich tatsächlich $\delta p \approx +0,1 \text{ mb}$.

Aus dem Temperaturstörungsfeld sollte gegenüber dem neutralen Fall auch im Luv eine Anhebung des Druckniveaus resultieren. Stattdessen liegt dort das Druckmaximum um 0,1 mb niedriger. Verantwortlich hierfür kann nur eine *dynamische* Stördruckverminderung sein. Diese läßt sich zumindest qualitativ begründen mit der Abflachung der Stromlinien, die sich aus dem durch stabile Schichtung begünstigten Stau ergibt. Dadurch vermindern sich gegenüber dem neutralen Fall, wo die bodennahe Strömung im Luv noch weitgehend der Topographieform folgt, die abwärts gerichteten Zentrifugalbeschleunigungen. Nach der Beziehung zwischen stromlinientransversaler Druckänderung und Zentrifugalbeschleunigung (s.u. S 110) resultiert daraus aber eine geringere Bodendruckerhöhung.

Auffallend ist die hohe Übereinstimmung der Bodendruckverteilung mit der Abmessung der von ihr verursachten Grenzschichtablösung (vgl. Abb. 18.2 e)). Auch die Lage des Rückstrommaximums ist genau dort, wo sie nach Abb. 19 a zu erwarten wäre: nämlich stromaufwärts

gesehen am Ende der durch den Bodendruckgradienten produzierten Beschleunigungsstrecke (beide bei etwa $x = 6,5 \text{ km}$).

Die Grenzschichtablösung spiegelt sich auch im Feld der - unter den oben formulierten Vorbehalten nach (2.4-9) parameterisierten - turbulenten Viskosität wieder :

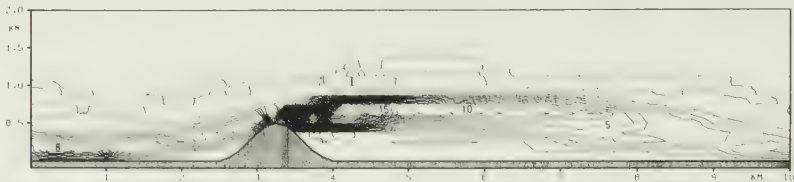


Abb. 20 : Turbulente Viskosität K_M [m^2/sec] für $u_g = 10 \text{ m/sec}$ und $\gamma_g = 0.65 \text{ K}/100 \text{ m}$

Im Luv liegen die maximalen Werte von K_M bei $8 \text{ m}^2/\text{s}$ (im neutralen Fall mit gleichem u_g bei $17 \text{ m}^2/\text{sec}$). In der abgehobenen Grenzschicht treten unmittelbar hinter der Ablösestelle lokal eng begrenzte Maxima von $K_M = 37 \text{ m}^2/\text{s}$ bzw. bei neutraler Schichtung $K_M = 53 \text{ m}^2/\text{s}$ auf. Diese erklären sich aus den extrem hohen Windscherungen unmittelbar hinter dem Gipfel (s. Abb. 21).

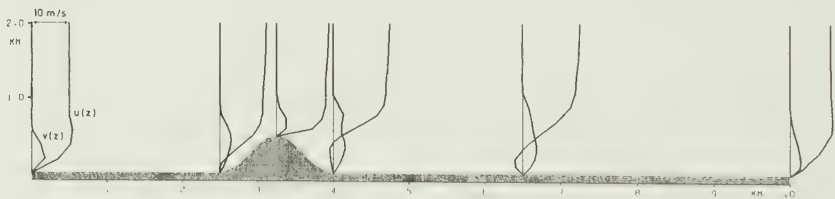


Abb. 21 : Ausgewählte Vertikalprofile der Windkomponenten u und v für $u_g = 10 \text{ m/sec}$ und $\gamma_g = 0.65 \text{ K}/100 \text{ m}$

Die Profilfolge in Abb. 21 zeigt (wie auch die übrigen Abbildungen 18.2a) - e)), daß die Auslaufströmung zwar schon weitgehend, aber noch nicht wieder vollständig an das ungestörte Beschleunigungsgleichgewicht der Anströmung adaptiert ist.

Das Feld der Vertikalgeschwindigkeit zeigt für $u_g = 15 \text{ m/s}$ ein Maximum von $7,2 \text{ m/s}$ und für $u_g = 10 \text{ m/s}$ von $3,9 \text{ m/s}$, das in beiden Fällen über dem Luvhang fast genau in Gipfelhöhe liegt (Abb. 18.1 c), 2 c)). Die leeseitige Absinkbewegung setzt beidemale knapp 2 km hinter dem Gipfel ein und ist mit $-1,5 \text{ m/s}$ am stärksten in der Umgebung des Ausströmrandes.

Die laterale Windkomponente v verhält sich wegen der vorausgesetzten

Homogenität in y-Richtung weitgehend passiv. Insbesondere das Fehlen der lateralen Stördruckbeschleunigungskomponenten, die auch bei langgestreckten Bergzügen von den seitlichen Begrenzungen her induziert werden, ist ein wesentlicher Defekt jedes zweidimensionalen Überströmungsmodells. Die Mitführung der y-Komponente der Bewegungsgleichung dient in einem solchen Modell im wesentlichen auch nur der Konstituierung der aufgeprägten *EKMAN*-Gleichgewichtsströmung und der Ermöglichung von Experimenten zur Schräganströmung. Deshalb sollen hier (mit Ausnahme der hangparallelen Strömung unterhalb der abgehobenen Grenzschicht, s.u. S 134) keine Versuche zur Deutung der v-Verteilungen gemacht werden.

Beim weiteren Fortgang zu kleineren Werten von u_g treten wesentliche Änderungen im Strömungsfeld auf. Am augenfälligsten ist in Abb. 18.3 e) die für $u_g = 9 \text{ m/s}$ erstmalig auftretende Ablösung am luvseitigen Fußpunkt des Berges. Zwar ist das eigentliche Ablösegebiet ($u \leq 0$) noch sehr klein und die maximale Gegenströmung mit $u = -0,1 \text{ m/s}$ praktisch noch bedeutungslos, entscheidend ist das Durchsetzen der gegenläufigen Stördruckbeschleunigung gegen die Trägheit der Anströmung jedoch für die Überströmung insgesamt. Indem die Strömung über der Reibungsschicht abgehoben wird, verändert sich der Einfluß des Berges so, als würde der luvseitige Hang abgeflacht. Bezüglich des Überströmungsverlaufes wird das tatsächliche Bergprofil also durch das induzierte Stördruckfeld virtuell verändert. Das hat wiederum wesentlichen Einfluß auf den gesamten Strömungswiderstand und damit die Impulsbilanz zwischen Boden und Atmosphäre. Hierauf kann im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht weiter eingegangen werden.

Das Ablösegebiet im Lee hat sich gegenüber $u_g = 10 \text{ m/s}$ verkürzt und die Intensität des Leewirbels verringert. Die maximale Vertikalgeschwindigkeit am Luvhang beträgt nur noch $3,0 \text{ m/s}$.

Für $u_g = 8 \text{ m/s}$ (Abb. 18.4) macht sich die stromaufwärts fortschreitende Ablösung über dem Luvhang (Abb. 18.4 e) nun bereits qualitativ in der Verteilung der Vertikalgeschwindigkeit bemerkbar (vgl. Abb. 18.4 c)). Zwar liegt der Spitzenwert von $1,9 \text{ m/s}$ immer noch am selben Punkt wie bei den größeren Werten von u_g , nämlich unmittelbar über dem Luvhang in Gipfelhöhe. Insgesamt reicht aber das Gebiet maximalen Steigens deutlich weiter stromaufwärts, wie an der $1,5 \text{ m/s}$ -Isolinie deutlich wird. Die leeseitige bodennahe Rückströmung bleibt jetzt betragsmäßig schon unter 1 m/s und die Strömung legt stromabwärts schon etwa 1 km früher an als bei $u_g = 9 \text{ m/s}$ (vgl. Abb. 18.3 e) und 4 e)). Die maximalen turbulenten Viskositäten über und hinter dem Ablösepunkt betragen nur noch knapp $10 \text{ m}^2/\text{s}$. In der luvseitigen bodennahen Anströmung erreicht K_M nur Werte bis $5 \text{ m}^2/\text{s}$.

Bei Verminderung der Antriebsstärke auf $u_g = 7 \text{ m/s}$ treten qualitative Änderungen im Strömungsverlauf ein, die sich am auffälligsten im Bild der Vertikalgeschwindigkeit 18.5 c) zeigen: Die durch das luvseitige Stördruckfeld bzw. die daraus resultierende Ablösung bewirkte virtuelle Vorverlagerung des Bergprofils hat das Vertikalgeschwindigkeitsmaximum weit stromaufwärts verlagert ($w_{\text{max}} \approx 1,5 \text{ m/s}$ fast 2 km vor dem Gipfel). Das kinematisch bedingte Steigen direkt über dem Luvhang deutet sich nur noch in Gestalt eines schwachen Sekundärmaximums an. Der Wirbel in dem auf über 1 km Länge angewachsenen und bis zur halben Gipfelhöhe reichenden Ablösegebiet ist

mit einer maximalen Rückströmung von $u = -0,4 \text{ m/s}$ nur schwach ausgeprägt.

Mit $u_g = 7 \text{ m/s}$ und $\gamma_g = 0.65 \text{ K/100 m}$ wird auf der (u_g, γ_g) -Parameterfläche das Gebiet erreicht, in dem die Bedingungen für Leewellen erfüllt sind (s. hierzu S122). Die Welle ist bei großer Wellenlänge ($\lambda \approx 7 \text{ km}$) zwar noch von geringer Intensität, prägt sich aber in allen Variablenfeldern deutlich aus. Das leeseitige Absinken hat sich auf maximal -2 m/s verstärkt (für $u_g = 8 \text{ m/s}$ war $w_{\min}$ noch $-1,6 \text{ m/s}$ und lag über 2 km weiter stromabwärts) und produziert im Bereich des Wellentals bereits eine positive Temperaturstörung von maximal $0,5 \text{ K}$ (Abb. 18.5 b). Etwa 4 km stromabwärts vom Gipfel setzt Steigen mit einem Maximum von $0,7 \text{ m/s}$ ein. Das Gebiet größter Horizontalgeschwindigkeit, das sich mit abnehmendem u_g kontinuierlich stromaufwärts verschoben hat, liegt jetzt schon unmittelbar über dem Gipfel.

Die Verkürzung der leeseitigen Grenzschichtablösung hat sich beschleunigt, da jetzt sowohl die wellenbedingte Abwärtsbewegung über dem Leehang als auch die hydrostatisch bedingte Druckerhöhung in diesem Gebiet der Ablösung entgegenwirken.

Noch deutlicher wird dies im nächsten Bild (Abb. 18.6 e) für $u_g = 6 \text{ m/s}$, wo die leeseitige Ablösung schon fast völlig unterdrückt ist. Die Leewelle ist jetzt deutlich ausgeprägt und beherrscht das Strömungsbild in allen Variablenfeldern. Das luvseitige Steigen ist wieder angewachsen ($2,0 \text{ m/s}$) und noch weiter stromaufwärts versetzt, jedoch sind Lage und vor allem Intensität des Steiggebietes jetzt kritisch zu beurteilen. Es ist nämlich deutlich zu erkennen, daß für die Parameterkombination $u_g = 6 \text{ m/s}$, $\gamma_g = 0.65 \text{ K/100 m}$ der blockierungsbedingte Beeinfluß bis zum Einströmrand reicht. Für zukünftige Experimente mit diesem Modell muß für solche Fälle das Integrationsgebiet luvseitig erweitert werden, um die EKMAN-Einströmrandbedingung physikalisch kompatibel mit der Dynamik im Innengebiet unmittelbar hinter dem Einströmrand zu erhalten.

Die leeseitige Absinkbewegung erreicht knapp hinter dem Fuß des Berges etwas oberhalb der Gipfelhöhe eine Stärke von $-2,7 \text{ m/s}$. Vor dem ersten Wellenberg tritt dann noch einmal Steigen bis maximal $+2,0 \text{ m/s}$ auf. Das darauffolgende Vertikalgeschwindigkeitsminimum liegt bei $-1,8 \text{ m/s}$. Die Wellenlänge ist gegenüber vorher von knapp 7 km auf $4,8 \text{ km}$ verkürzt und der erste Wellenberg liegt $3,5 \text{ km}$ stromabwärts vom Gipfel (Abb. 18.6 c). Diese Lage bezüglich eines symmetrischen Berges ist in hoher Übereinstimmung mit Beobachtungen (QUENEY et al. [56], ATKINSON [2], LINDEMANN [35] (dort weitere Belegzitate)) und mit den Ergebnissen linearer Wellentheorien (s. z.B. die aus dem SCORERschen Zweischichtenmodell folgende Gleichung für die vertikale Stromlinienauslenkung [6]), nach denen der erste Wellenberg schon nach etwa $3/4$ der Leewellenlänge vom Gipfel aus stromabwärts auftritt.

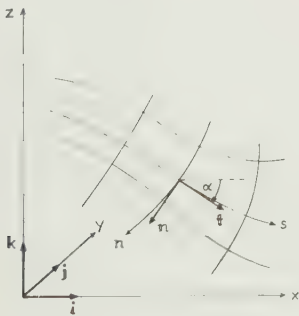
Die Bodendruckkurve zeigt jetzt gegenüber derjenigen für $u_g = 10 \text{ m/s}$ (Abb. 19 a) ein völlig verändertes Bild (Abb. 22): Deutlich erkennbar ist der mit der Welle in Phase befindliche Verlauf mit einem Maximum unter dem Wellenberg und einem Minimum unter dem Wellental, der schon von SCORER [60] verbürgt ist. Diese welleninduzierte Bodendruckverteilung produziert vom Leewellentale stromabwärts bis zum



Abb. 22 : Bodendruckstörung $p(x, z=h(x))$ für $u_g = 6 \text{ m/sec}$ und $\gamma_g = 0.65 \text{ K/100 m}$

folgenden Wellenberg einen Bodendruckgradienten, der eine Druckbeschleunigung zum Berg hin bewirkt. Diese gegenläufige Beschleunigung von maximal 10^{-2} m/s^2 reicht aus, um am Ende der "Bremsstrecke", d.h. unter dem Wellenberg Ablösung zu erzeugen (s. Abb. 18.6 e)), die an Ausmaß die rudimentäre Grenzschichtablösung über dem Lee-hang übertrifft. Der zugehörige Rotor ist im numerischen Ergebnis qualitativ zwar schon gut ausgeprägt, ist jedoch mit maximaler Gegenströmung von $u \approx -0,7 \text{ m/s}$ noch so schwach, daß er sich in den Abbildungen 18.6 a) bzw. e) noch nicht abzeichnen kann.

Quantitativ weist die Bodendruckkurve aus, daß die von der Welle induzierten hydrostatischen und dynamischen Stördruckbeiträge gegenläufig sein müssen, denn rein dynamisch würde man zumindest als Folge der großen Zentrifugalbeschleunigungen (betragsmäßig z.T. mehr als 10^{-2} m/s^2) genau die umgekehrte Verteilung von Maxima und Minima erwarten. Die durch das Feld der Temperaturstörung (Abb. 18.6 b)) produzierte statische Druckstörung muß demnach den dynamisch bedingten Anteil des Stördruckes am Boden überkompensieren. Das läßt sich anhand der Abb. 18.6 tatsächlich bestätigen.



Mit dem nebenstehend skizzierten stromlinienangepaßten natürlichen Koordinatensystem in der $x-z$ -Ebene

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{v}}{v} \quad (v = u\mathbf{i} + w\mathbf{k})$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{j} \times \mathbf{t}$$

(Mit dieser Vereinbarung ist eine mit dem Rechtssinn kompatible positive Winkelzählung in der $x-z$ -Ebene gewährleistet)

schreibt sich die stromliniennormale Komponente der Bewegungsgleichung ohne

Berücksichtigung der Reibungsbeschleunigung mit $v = |\mathbf{u}\mathbf{i} + \mathbf{w}\mathbf{k}|$ als

$$v^2 \frac{\partial \alpha}{\partial s} + f v \sin \alpha = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial n} - g \frac{\partial \eta}{\partial s} \cos \alpha + f v_g \sin \alpha$$

Betrachtet man isoliert den Einfluß der Zentrifugalbeschleunigung auf die Druckänderung in Normalenrichtung, dann erhält man aus

$v^2 \frac{\partial \alpha}{\partial s} = - \frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial p}{\partial n}$ eine Abschätzung für den *dynamischen* Stördruckanteil am Boden. Setzt man für eine Strecke δn mittlere Werte für $\frac{\partial \alpha}{\partial s}$ und v , dann hat man näherungsweise

$$\delta p_{dyn} \approx - \varrho_0 \left(\frac{\delta n}{v} \right)^2 \frac{\partial \alpha}{\partial s} \delta n$$

Aus Abb. 18.6 a) schätzt man z.B. im Bereich des Wellentals bei $x \approx 5,5 \text{ km}$ für das Intervall $250 \text{ m} \leq z \leq 1750 \text{ m}$ ($\delta n = 1500 \text{ m}$) ab :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s} \approx - \frac{\pi/4}{2000 \text{ m}} \approx - 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1}$$

$$v \approx 6 \text{ m/s}$$

Damit akkumuliert sich am Boden ein zentrifugalbeschleunigungsbedingter Stördruckanteil von

$$\delta p_{dyn} \approx + 2,1 \cdot 10^4 \frac{\text{g}}{\text{m s}^2} = + 0,21 \text{ mb}$$

Für den *hydrostatischen* Beitrag zum Stördruck am Boden liefert die Abschätzung aus $\frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial p}{\partial n} = -g \frac{\partial \eta}{\partial s}$ ($\cos \alpha$ ($x = 5,5 \text{ km}$) = 1) wieder mit Mittelwerten über das Intervall δn

$$\delta p_h \approx -g \varrho_0 \frac{\delta n}{\theta_0} \delta n$$

Mit dem aus Abb. 18.6 b) abgelesenen Wert $\frac{\delta n}{\theta_0} \approx + 0,45 \text{ K}$ und $\theta_0 \approx 290 \text{ K}$ wird

$$\delta p_h \approx - 2,3 \cdot 10^4 \frac{\text{g}}{\text{m s}^2} = - 0,23 \text{ mb}$$

In der Summe der beiden gegenläufigen Beiträge überwiegt also der hydrostatische Anteil und es ist

$$\delta p = \delta p_{dyn} + \delta p_h \approx - 0,02 \text{ mb}$$

Das stimmt sogar quantitativ mit dem aus Abb. 22 abzulesenden Wert von $- 0,03 \text{ mb}$ sehr gut überein, doch soll dies angesichts der groben Mittelwertschätzung nicht überbewertet werden.

Für $u_g = 5 \text{ m/s}$ (Abb. 18.7) hat sich die Wellenlänge auf $3,6 \text{ km}$ verkürzt und die Amplitude hat noch zugenommen. Dem maximalen Sinken von $w = - 3,7 \text{ m/s}$ über dem Leehang folgt ein Maximum der Vertikalgeschwindigkeit von $4,1 \text{ m/s}$ vor dem ersten Wellenberg, der $2,4 \text{ km}$ stromabwärts vom Gipfel liegt, also wiederum in einer Entfernung, die $3/4$ der Leewellenlänge entspricht! Das folgende Sinkgebiet hat noch ein Minimum von $w = - 3,5 \text{ m/s}$. Auch die zweite Welle ist mit einem Vertikalgeschwindigkeitsmaximum von $2,1 \text{ m/s}$ noch gut

ausgeprägt. Die große Wellenamplitude mit den daraus resultierenden starken Temperaturstörungen (im Lee: $-1,5\text{ K} \leq \Delta T \leq 1,4\text{ K}$) führt zu großen Stördruckgradienten am Boden. Entsprechend haben die horizontalen Stördruckbeschleunigungen große Beträge von mehr als 10^{-2} m/s^2 . Dort, wo diese Beschleunigungen gegenläufig zur Anströmrichtung sind, nämlich jeweils zwischen Wellental und dem stromabwärts folgenden Wellenberg, verursachen sie Ablösung. Die zugehörigen kräftigen Rotoren erzeugen maximale Rückströmungen von $-1,8\text{ m/s}$ unter dem ersten bzw. $-1,6\text{ m/s}$ unter dem zweiten Wellenberg. Besonders der erste Rotor ist mit seiner maximalen Aufwindkomponente von $w = +1,2\text{ m/s}$ im Bild 18.7 c) der Vertikalgeschwindigkeit gut ausgeprägt.

Bezüglich der luvseitigen Anströmung gilt jetzt noch mehr die kritische Anmerkung zur Abb. 18.6. Die blockierungsbedingte virtuelle Vorverlagerung des Bergprofils erzeugt im Gebiet des Einströmrandes bereits so große Störungen, daß die Einströmrandbedingung nicht mehr kompatibel mit der Dynamik im unmittelbar angrenzenden Innengebiet ist.

In der zweiten Abbildungsserie zu den numerischen Experimenten mit $u_g = 10\text{ m/s}$ und variierteter Schichtungsstabilität γ_g (Abb. 23.1 - 7) begegnen qualitativ keine Strömungsphänomene, die nicht schon im Rahmen der ersten Referenzserie mit variablem u_g diskutiert worden sind. Die Auswertung der Abbildungen 23.1 - 7 kann daher knapp gehalten und auf die quantitativen Änderungen der einzelnen charakteristischen Erscheinungen mit wachsender Schichtungsstabilität beschränkt werden. Erst unter Einbeziehung aller hier nicht im einzelnen ausgewerteten Experimente in der $\{u_g, \gamma_g\}$ -Parameter-ebene (s. Diagramm S 96) wird dann noch einmal eine summarische Auswertung, insbesondere bezüglich der Leewellen und der Grenzschichtablösung präsentiert.

Abb. 23.1 zeigt die Überströmung bei neutraler Schichtung ($\gamma_g = \gamma_i$). Das Strömungsfeld wird hier, abgesehen vom Bereich der Grenzschicht, von den Trägheitsbeschleunigungen beherrscht. Ohne jegliche Auftriebsbeschleunigungen - Abb. 23.1 b) kann hier nur als numerischer Güte-test interpretiert werden! - stellt sich das Vertikalgeschwindigkeitsfeld im Luv praktisch kinematisch auf das Bergprofil ein. Das lokale Maximum von $w = 5,6\text{ m/s}$ über dem oberen Hangbereich in Gipfelhöhe wird man nach Abb. 23.1 c) jedoch nicht als charakteristische Hangaufwindstärke für das gegebene u_g ansehen. Von der w -Isolinienlage ist viel mehr ein Wert von $3-4\text{ m/s}$ als repräsentativ für den oberen Hangbereich abzulesen. Die aus Abb. 23.1 a) abzuschätzenden luvseitigen, zum Hang weisenden Zentrifugalbeschleunigungen von $5 \cdot 10^{-3}$ bis 10^{-2} m/s^2 reichen nicht aus, um über eine genügend lange Strecke einen zur Ablösung erforderlichen Druckgradienten am Boden zu produzieren. Im Lee dagegen wirken die durch Tangentialbeschleunigungen im quasi-reibungsfreien Strömungsgebiet hervorgerufenen und der Grenzschicht aufgeprägten Druckbeschleunigungen über eine große horizontale Strecke und erzeugen die 5 km stromabwärts reichende Grenzschichtablösung (Abb. 23.1 e)). Der zugehörige Leewirbel prägt sich in der Vertikalgeschwindigkeitsverteilung durch ein sekundäres Maximum unmittelbar über dem Leehang aus (Abb. 23.1 c)).

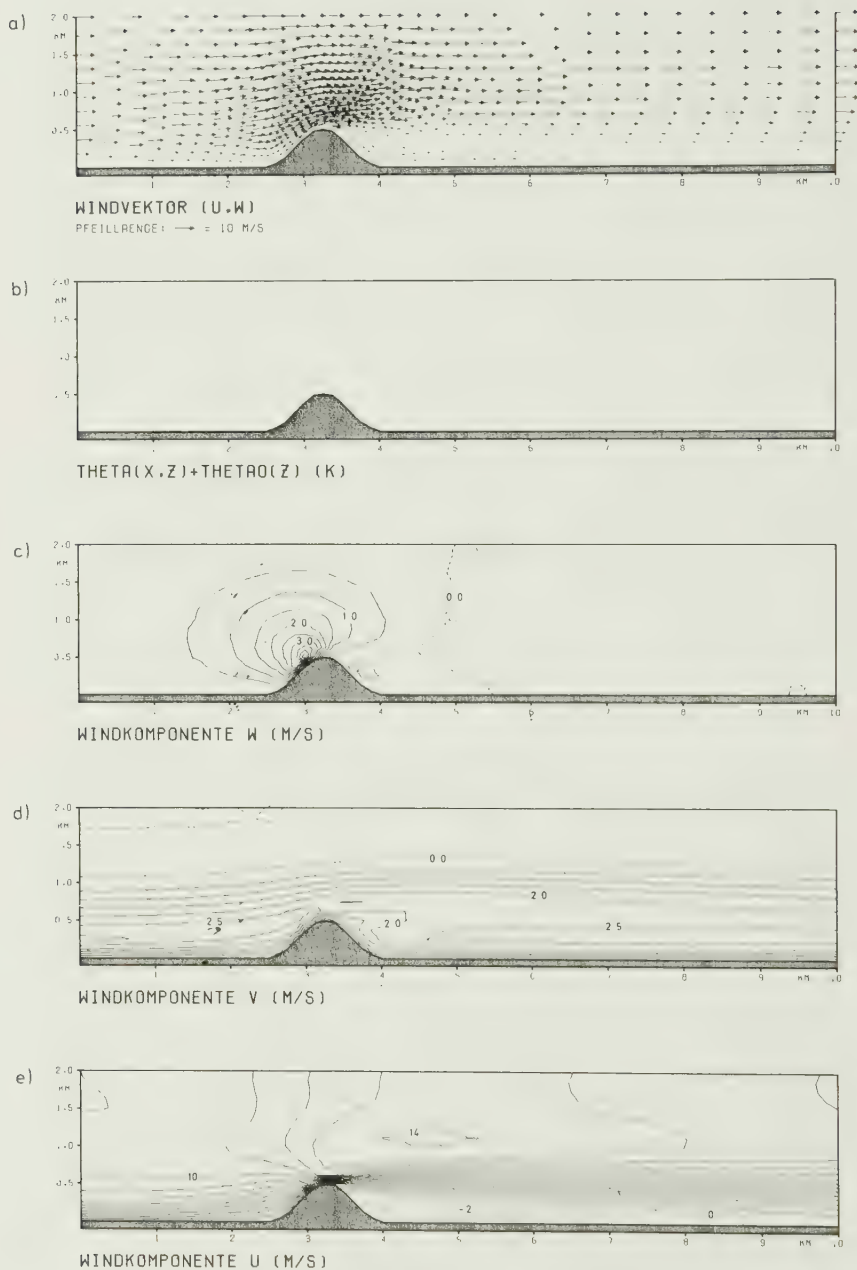


Abb. 23.1: Serie Stabilitätsvariation mit $u_g = 10 \text{ m/sec}$

$$\gamma_g = \gamma_i = 0.98 \text{ K/100m}$$

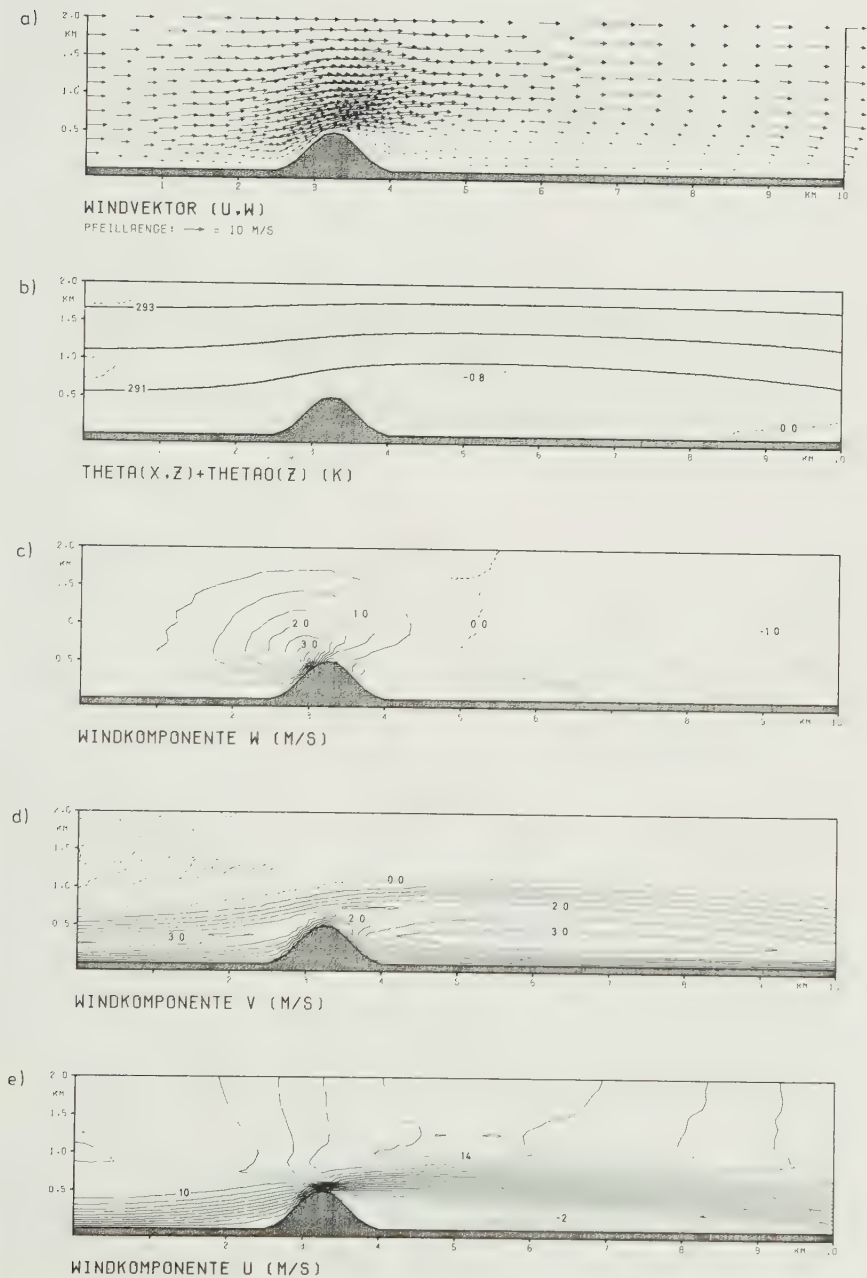


Abb. 23.2: Serie Stabilitätsvariation mit $u_g = 10 \text{ m/sec}$
 $\gamma_g = 0.80 \text{ K/100 m}$

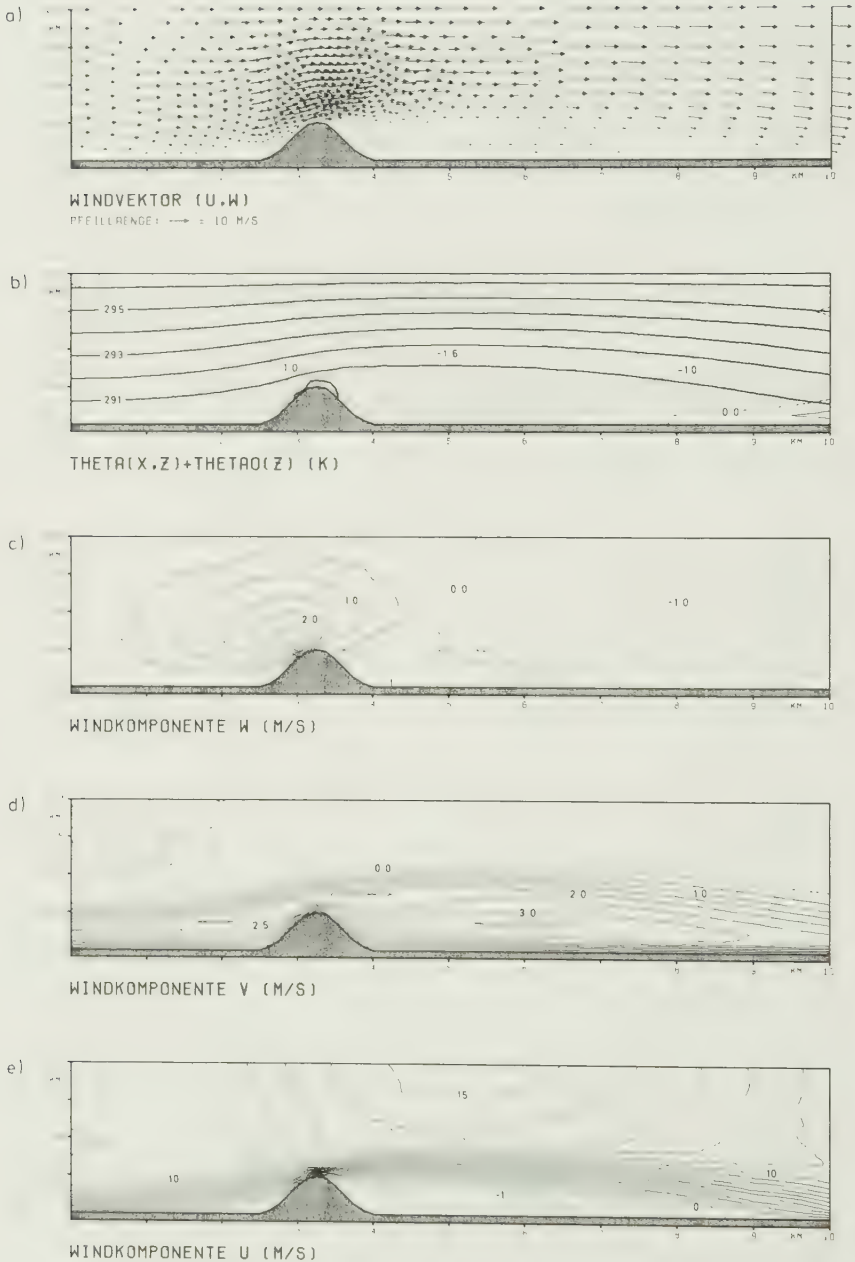


Abb. 23.3 : Serie Stabilitätsvariation mit $u_g = 10 \text{ m/sec}$

$$\gamma_g = 0.65 \text{ K/100 m}$$

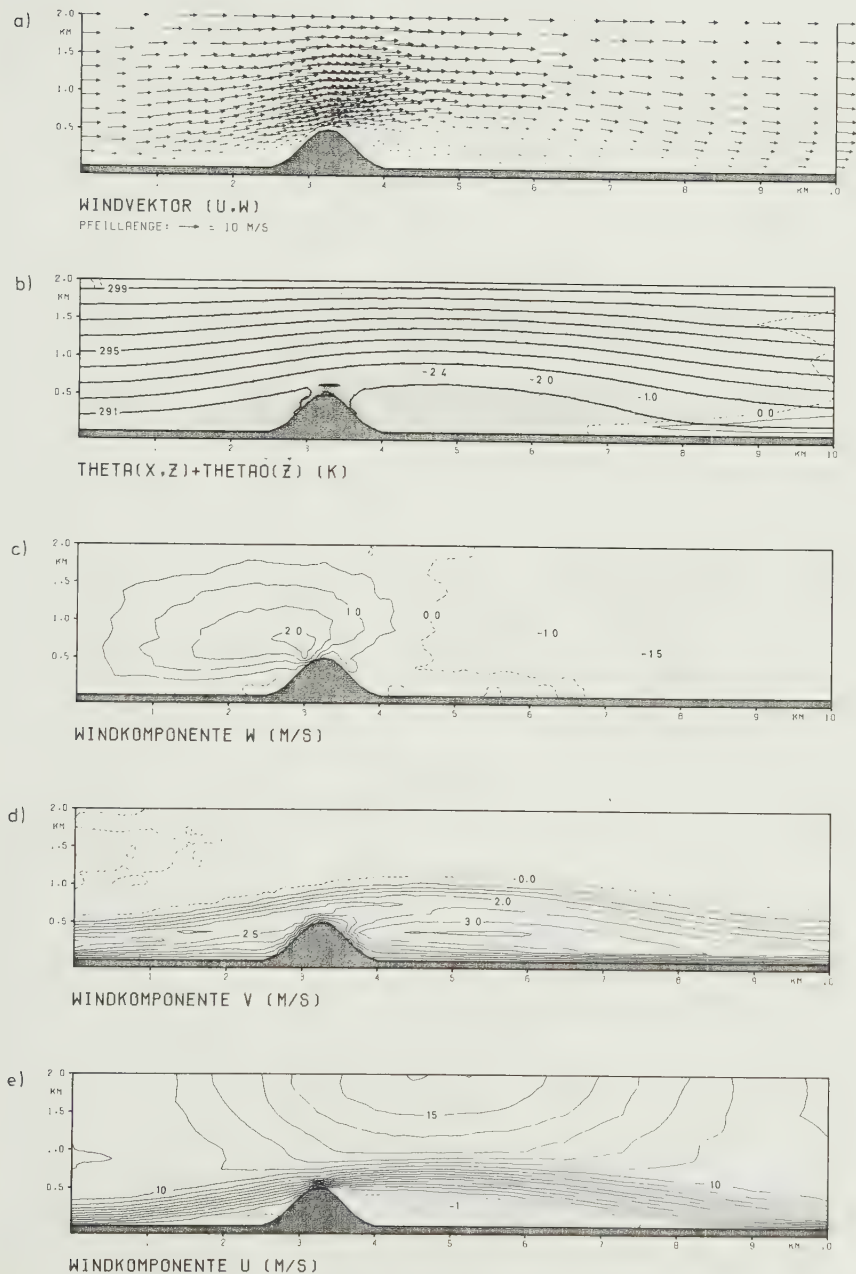


Abb. 23.4 : Serie Stabilitätsvariation mit $u_g = 10 \text{ m/sec}$

$$\gamma_g = 0.50 \text{ K/100m}$$

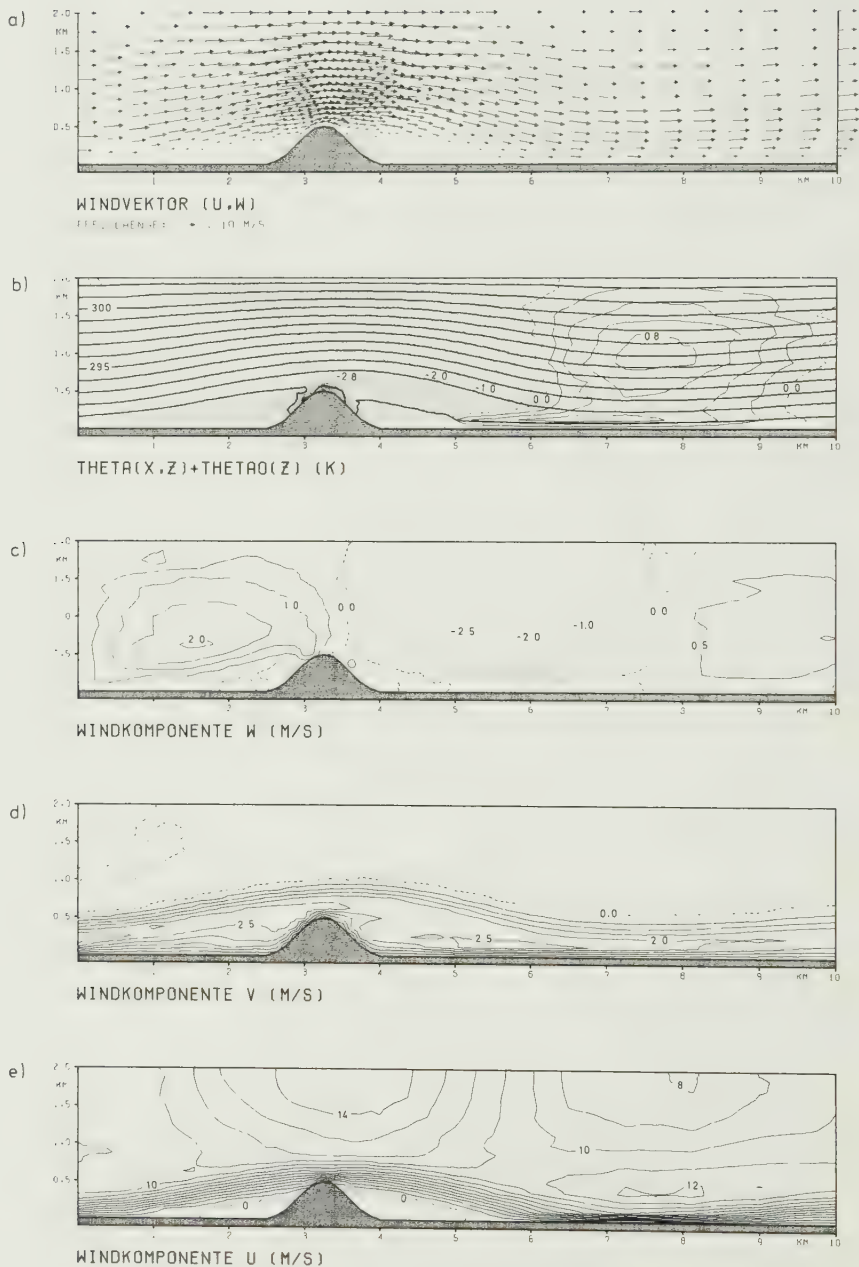


Abb. 23.5: Serie Stabilitätsvariation mit $u_g = 10 \text{ m/sec}$

$$\gamma_g = 0.35 \text{ K/100 m}$$

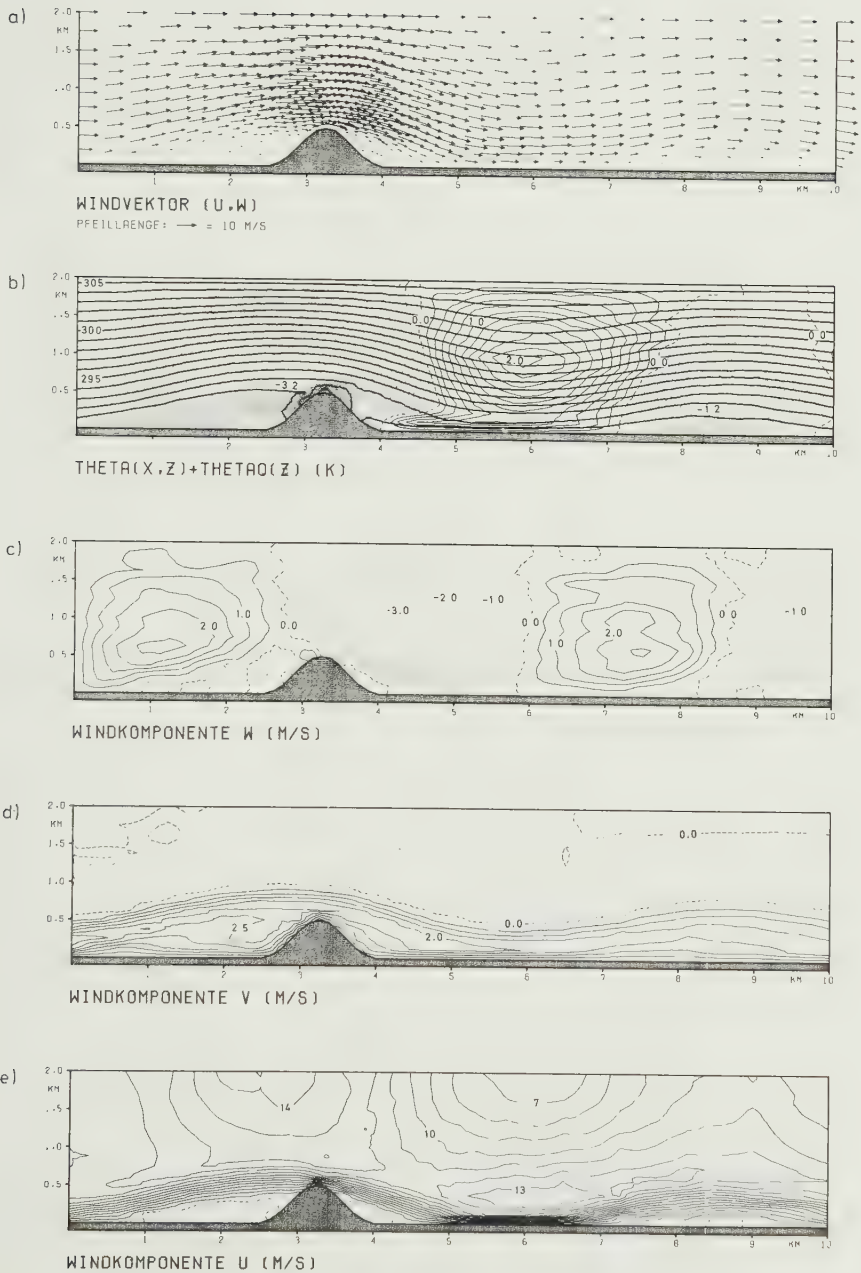


Abb. 23.6 : Serie Stabilitätsvariation mit $u_g = 10 \text{ m/sec}$

$$\gamma_g = 0.20 \text{ K/100 m}$$

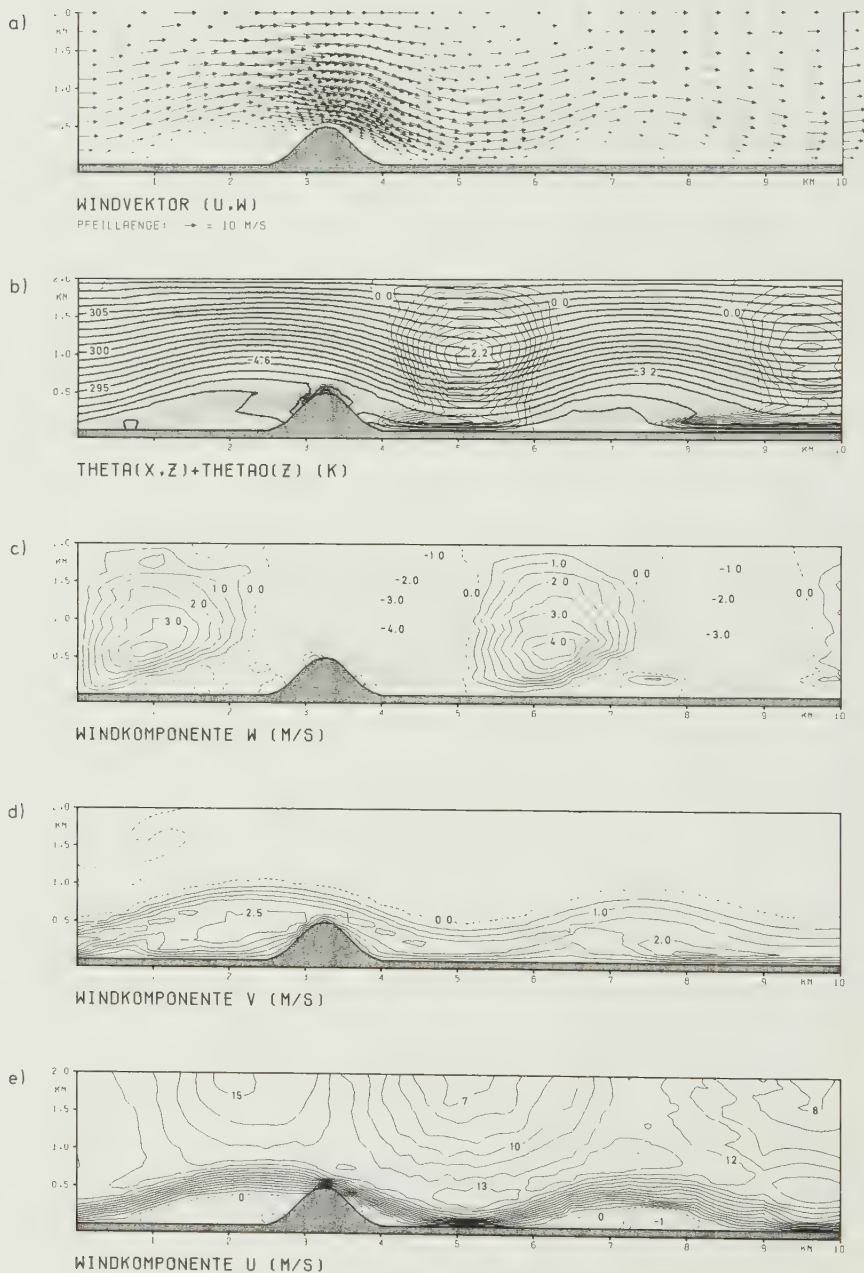


Abb. 23.7 : Serie Stabilitätsvariation mit $u_g = 10 \text{ m/sec}$

$$\gamma_g = 0.00 \text{ K/100 m}$$

Schon bei der schwächsten Schichtungsstabilität mit $\gamma_q = 0.80 \text{ K}/100 \text{ m}$ (Abb. 23.2) machen sich die aus den Temperaturstörungen resultierenden Auftriebsbeschleunigungen bemerkbar. Das lokale Hangaufwindmaximum von immer noch $4,8 \text{ m/s}$ ist allerdings etwas größer, als nach der Temperaturstörungsverteilung (Abb. 23.2 b) zu erwarten wäre: Immerhin wird bis zu diesem Punkt eine vertikale Strecke von $\delta z \approx 300 \text{ m}$ in einem abwärts gerichteten Auftriebsbeschleunigungsfeld, das nach

Abb. 23.2 b dort eine mittlere Stärke von $g \frac{\bar{\delta} z}{\bar{\delta} x} \approx 10^{-2} \text{ m/s}^2$ hat, mit einer mittleren Steiggeschwindigkeit von $\bar{w}^{\delta z} \approx 2 \text{ m/s}$ durchlaufen. Gegenüber dem neutralen Fall sollte - falls diese sehr vereinfachte Abschätzung zulässig ist - daraus eine Verringerung des Vertikalgeschwindigkeitsmaximums von etwa $g \frac{\bar{\delta} z}{\bar{\delta} x} \frac{\delta z}{\bar{w}} \approx 1,5 \text{ m/s}$ folgen. Daß

diese mit $0,8 \text{ m/s}$ niedriger ausfällt, kann nur mit der infolge der stabilen Schichtung schon deutlich verminderten Turbulenzintensität begründet werden. Dieselbe stabilitätsbedingte Abnahme des turbulenten vertikalen Impulstransportes scheint auch die einzig plausible Erklärung dafür zu sein, daß trotz der ablösehemmenden Wirkung der abwärts gerichteten "Buoyancy"-Beschleunigung die Strömung sogar erst etwas weiter stromabwärts als im neutralen Fall anlegt (vgl. Abb. 23.1 e, 2 e). Für weiter steigende Schichtungsstabilität schrumpft die leeseitige Grenzschichtablösung dann aber rasch (vgl. Abb. 23.3 e-7 e). Die maximalen turbulenten Viskositäten im Übergangsbereich zwischen dem Ablösegebiet und der abgehobenen Strömung haben sich von etwa $15 \text{ m}^2/\text{s}$ im neutralen Fall für $\gamma_q = 0.80 \text{ K}/100 \text{ m}$ auf $8 \text{ m}^2/\text{s}$ reduziert.

Über dem Luvhang deutet sich unmittelbar am Fußpunkt bereits eine Verzögerung an, die sich dann für $\gamma_q = 0.65 \text{ K}/100 \text{ m}$ schon zu einer allerdings nur lokalen Stagnation ($u = -0,05 \text{ m/s}$ an einem Punkt) weiterentwickelt (Abb. 23.3 e). Als Folge davon ist wieder die stromaufwärts gerichtete Ausdehnung des Steiggebietes zu sehen (Abb. 23.3 c). Dieser Effekt der virtuellen Vorverlagerung des Bergprofils durch Blockierung verstärkt sich dann weiter bei der Schichtungsstabilität $\gamma_q = 0.50 \text{ K}/100 \text{ m}$ (Abb. 23.4). Hier prägt sich die luvseitige Ablösung bereits in der Abbildung 23.4 a des Vektorfeldes und noch deutlicher im Horizontalgeschwindigkeitsfeld (Abb. 23.4 e) aus. Das Vertikalgeschwindigkeitsmaximum befindet sich immer noch unmittelbar über dem oberen Teil des Luvhanges und hat sich gegenüber den vorangegangenen geringeren Stabilitäten über $4,8$ und $3,9$ auf $2,5 \text{ m/s}$ verringert. Die leeseitige Absinkbewegung ist mit $w = -1,8 \text{ m/s}$ am stärksten etwas über 4 km stromabwärts vom Gipfel. Zur Wellenbildung reicht die Stabilität mit $\gamma_q = 0.50 \text{ K}/100 \text{ m}$ bei der gegebenen Anströmstärke ($u_q = 10 \text{ m/s}$) noch nicht aus. Bereits für die nächsthöhere Schichtungsstabilität mit $\gamma_q = 0.35 \text{ K}/100 \text{ m}$ sind jedoch die Bedingungen für Wellenanregung erfüllt. Diese, mit $\lambda \approx 7,5 \text{ km}$ noch lange Welle produziert zwar noch keine großen Vertikalgeschwindigkeiten, zeichnet sich aber in allen Variablenfeldern der Abb. 23.5 gut ab. Das maximale Steigen vor dem Wellenberg mit $w \approx 1,0 \text{ m/s}$ liegt etwa bei $x = 9 \text{ km}$. Am deutlichsten macht sich die Welle im Sinkgebiet (maximales Absinken: $w \approx -2,9 \text{ m/s}$) durch die Einschnürung der leeseitigen Ablösung bemerkbar, deren Rotor mit einer stärksten Gegenströmung von $u = -0,8 \text{ m/s}$ nur noch schwach ausgeprägt ist. Das Gebiet der Luvblockierung hat sich auf eine Länge von $1,5 \text{ km}$ stromaufwärts ausgeweitet. Auch in

diesem Ablösegebiet findet sich ein schwacher Rotor mit einer maximalen Rückströmung von $u = -0,6 \text{ m/s}$.

Für noch stabilere Schichtung ($\gamma_g = 0,20 \text{ K/100m}$, Abb. 23.6) ist die Leewelle voll entwickelt. Bei einer Wellenlängenverkürzung um fast 2 km auf weniger als 6 km haben die Vertikalgeschwindigkeiten deutlich zugenommen: Dem Sinkgebiet über dem Leehang mit $w_{\min} \approx -4,0 \text{ m/s}$ folgt ein maximales Steigen von $w = 2,6 \text{ m/s}$ vor dem ersten Wellenberg. Daran schließt sich noch ein weiteres Sinkgebiet mit $w_{\min} \approx -2,0 \text{ m/s}$ an und unter dem Wellenberg hat bereits Ablösung eingesetzt ($u_{\min} \approx -0,9 \text{ m/s}$).

Die Blockierung im Luv hat sich weiter verstärkt und das Vertikalgeschwindigkeitsmaximum weit stromaufwärts versetzt. Die leeseitige Ablösung beschränkt sich nur noch auf den unteren Hangbereich.

Spätestens die Abb. 23.7 für isotherme Schichtung ($\gamma_g = 0$) ist mit den schon bei Abb. 18.6 und 18.7 formulierten Einschränkungen bezüglich der luvseitigen Anströmung zu beurteilen. Insbesondere am Vektorfeld und an der Vertikalgeschwindigkeitsverteilung ist deutlich zu sehen, daß für diese starke Schichtungsstabilität der Einströmrand nicht weit genug vor dem Hindernis liegt. Allerdings sollten die Verhältnisse im Lee davon unbeeinflusst noch realistisch simuliert sein, worauf sowohl die Wellenlänge ($\lambda \approx 4,5 \text{ km}$) als auch die Phase bezüglich des Gipfels hindeuten. Die großen Vertikalgeschwindigkeiten (stärkstes Sinken mit $w = -5,0 \text{ m/s}$ vor dem ersten bzw. $-3,7 \text{ m/s}$ vor dem zweiten Wellental und maximales Steigen mit $+4,5 \text{ m/s}$ vor dem Wellenberg) produzieren große negative und positive Temperaturstörungen (Abb. 23.7b) und damit starke horizontale Druckbeschleunigungen am Boden. Entsprechend intensiv ist der Rotor unter dem Wellenberg (Abb. 23.7a, c, e) mit maximaler Gegenströmung von $u = -2,6 \text{ m/s}$ und mehr als 2 m/s Steigen.

Durch die Abbildungsserien 18 und 23 ist die Gesamtheit der Simulationen zur Variation der Einflußgrößen u_g und γ_g qualitativ bereits gut repräsentiert, d.h., obwohl in diesen Abbildungen nur 25% der hierzu vorliegenden Ergebnisse dargestellt sind, finden sich dort bereits fast alle für die Überströmung eines steilen Berges charakteristischen Erscheinungen. Abb. 24 zeigt die klassische Einteilung dieser Strömungsformen von FÖRCHTGOTT [20]. Unter den im Rahmen dieser Arbeit gegebenen Voraussetzungen erwiesen sich die Strömungstypen 3b und 3c dieser Klassifikation als dominant. Der starke stationäre Leewirbel und die mit bodennaher Gegenströmung verbundene Luvblockierung wurden insbesondere durch die große Hangneigung begünstigt und fanden sich in quantitativ sehr unterschiedlicher Ausprägung in den meisten Simulationen. Für die Anregung von Leewellen ergaben die Experimente eine kritische Kurve in der $\{u_g, \gamma_g\}$ -Parameterebene (s.u.). Waren die Anhebungsbedingungen erfüllt, dann beherrschte die Welle mitsamt den zugehörigen Ablösungen und Rotoren das Strömungsfeld und beeinflusste wesentlich die Grenzschichtablösung im Lee (s. die obige Diskussion der Abb. 18.1-7, 23.1-7).

Im folgenden soll für diese dominanten Strömungsphänomene eine quantitative Auswertung unter Berücksichtigung *aller* durchgeführten Experimente zur $\{u_g, \gamma_g\}$ -Variation präsentiert werden. Dabei wird sich zwanglos die Gelegenheit bieten, auf einige Besonderheiten

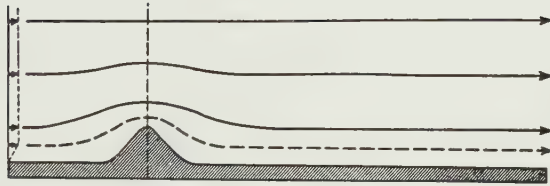


Fig. 3 a — Laminar streaming

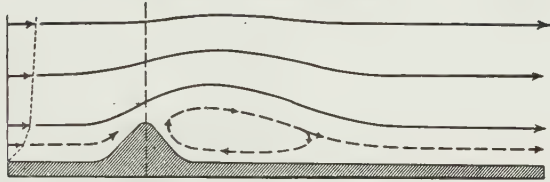


Fig. 3 b — Standing eddy streaming

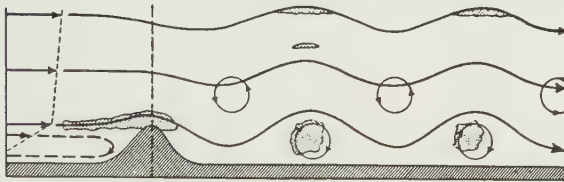


Fig. 3 c — Wave streaming

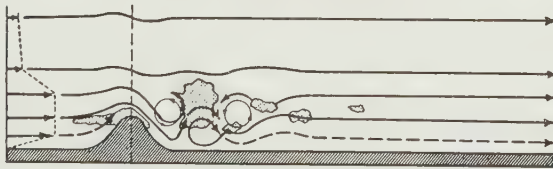


Fig. 3 d — Rotor streaming



Fig. 3 e — Rotor streaming

Abb. 24 : Klassifikation typischer Formen der
Bergüberströmung nach FÜRCHTGOTT

einzuzeigen, die sich in den ausführlich diskutierten Ergebnissen nicht gezeigt haben.

Die folgende Abbildung 25 zeigt die Abhängigkeit der Leewellenlänge von den beiden Einflußgrößen u_g und γ_g .

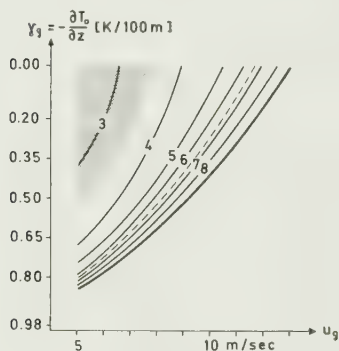


Abb. 25 : Abhängigkeit der Leewellenlänge λ [km] von u_g und γ_g in den numerischen Simulationen

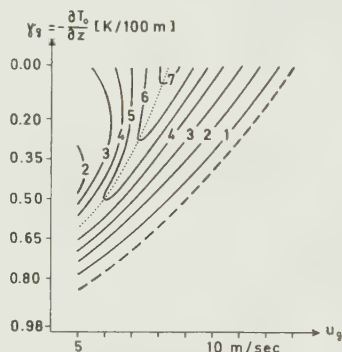


Abb. 26 : Abhängigkeit der maximalen Vertikalgeschwindigkeit w [m/sec] im aufsteigenden Teil der ersten Leewelle von u_g und γ_g

Das auffälligste Ergebnis ist zunächst die dick hervorgehobene Grenzkurve, die alle Parameterkombinationen, für die sich Leewellen einstellen, von denjenigen abgrenzt, für die das simulierte Strömungsfeld wellenfrei blieb.

Qualitativ war eine solche Grenzwellenlinie $f(u_g, \gamma_g, \lambda \rightarrow \infty) = 0$ von der linearen Wellentheorie her zu erwarten: Ohne Berücksichtigung von CORIOLIS-Effekten wird durch die endliche obere Randbedingung $w(H) = 0$ ein Eigenwertproblem formuliert, das nur ein diskretes Wellenspektrum mit einer kritischen Grenzbedingung für die Kombination von Anströmstärke und Schichtungsstabilität zuläßt. Zwar sind die Voraussetzungen der linearen Störungstheorie im vorliegenden Modell auch nicht mehr annähernd gegeben, trotzdem ist es aber interessant, die sich experimentell ergebende Grenzkurve mit derjenigen zu vergleichen, die sich aus dem einfachsten linearen Modell ergibt.

Dazu werden im Modellgleichungssystem (2.3a-c) die Reibungs- und Coriolis-Beschleunigungen vernachlässigt und konsequenterweise ein zonales Anströmprofil $U(z)$ vorausgesetzt. Damit entfällt die zweite Komponente der Bewegungsgleichung und u_g ist mit einer mittleren Anströmgeschwindigkeit zu identifizieren. Aus dem verbleibenden Gleichungssystem folgt in üblicher Weise nach Linearisierung und Elimination der Variablen u, p, ϕ eine elliptische Differentialgleichung für w . Aus dieser wiederum resultiert mit dem

Separationsansatz $w(x,z) = W(z) \exp[ik_x x]$ das Eigenwertproblem

$$\frac{d^2 W}{dz^2} + \left[\frac{g(y_1 - y_2)}{\theta_0 U^2} - \frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dz^2} - k_x^2 \right] W = 0$$

$$W(0) = 0, \quad W(H) = 0$$

Bei Beschränkung auf den einfachsten Fall konstanter Anströmung U ergibt sich daraus die diskrete Folge möglicher Wellenlängen

$$\lambda_n = \frac{2\pi H}{\sqrt{\frac{H^2 g(y_1 - y_2)}{\theta_0 U^2} - n^2 \pi^2}} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (5.1)$$

die sich von der klassischen, aus dem Partikelmodell folgenden Abschätzung $\lambda = 2\pi U \sqrt{g(y_1 - y_2)}$ um den "diskretisierenden" Zusatzterm $n^2 \pi^2$ unter der Wurzel unterscheidet.

Daraus folgen für $n=1$ die Kombinationen höchster Anströmgeschwindigkeit und geringster Schichtungsstabilität, für die gerade noch Wellenbildung möglich ist (λ_1 reell). Für verschwindenden Radikanden in (5.1) ergibt sich die kritische Kurve

$$y_2(U) = y_1 - \frac{\pi^2 \theta_0}{H^2 g} U^2,$$

die in Abb. 25 gestrichelt eingezeichnet ist.

Ihre Lage zeigt, daß das nichtlineare Modell im Vergleich zu dem einfachsten linearen Modell bei gegebener Schichtungsstabilität noch bei höheren Windgeschwindigkeiten bzw. umgekehrt für gegebene Anströmgeschwindigkeiten schon bei schwächerer Schichtungsstabilität Wellen produziert. Entsprechend sind im ganzen Gebiet oberhalb der kritischen Kurve $f(u_2, y_2, \lambda^{lin} \rightarrow \infty) = 0$ die für $n=1$ aus (5.1) berechneten Wellenlängen größer als die für gleiche Werte von u_2 und y_2 aus dem nichtlinearen Modell resultierenden Wellenlängen λ . Das Verhältnis λ/λ^{lin} geht jedoch mit zunehmendem Abstand von der "Anregungskurve", d.h. zu größeren Stabilitäten und kleineren Anströmgeschwindigkeiten hin, gegen 1. So ist z.B. $\lambda/\lambda^{lin} = 0,59$ für $\lambda = 5$ km, $0,79$ für $\lambda = 4$ km und $0,92$ für $\lambda = 3$ km.

Abb. 26 zeigt die Abhängigkeit des Vertikalgeschwindigkeitsmaximums im aufsteigenden Teil der ersten Welle von u_2 und y_2 . Auffällig ist, daß die Achse dieses Isolinienfeldes sehr genau mit der Isolinie $\lambda(u_2, y_2) = 3,8$ km zusammenfällt. Entlang dieser Linie nimmt w_{max} von $4,1$ m/s bei $u_2 = 5$ m/s und $y_2 = 0,65$ K/100 m auf knapp über 7 m/s bei $u_2 = 8,5$ m/s und isothermer Schichtung zu. Im ganzen Gebiet zwischen der gestrichelten Grenzkurve $\lambda \rightarrow \infty$ und der punktierten Linie $\lambda = 3,8$ km nehmen die Vertikalgeschwindigkeiten mit abnehmender Wellenlänge zu. Für Wellenlängen $\lambda < 3,8$ km bzw. gleichbedeutend für noch höhere Stabilität oder geringere Anströmgeschwindigkeit

schwächt sich der Leewellenzug dann rasch ab und wird auch qualitativ diffus. Das Gebiet auf der $\{u_3, \gamma_3\}$ -Parameterebene, in dem die Leewelle sich auflösen beginnt bzw. völlig zusammenbricht, ist in Abb. 25 durch Rasterung markiert.

Dieses sehr markante Umschlagen einer stationären Strömungsform (der Wellenströmung) in eine ganz andere (Rotorströmung) soll am Beispiel des Überganges von $u_3 = 7 \text{ m/s}$ zu $u_3 = 5 \text{ m/s}$ bei jeweils $\gamma_3 = 0.20 \text{ K/100m}$ demonstriert werden. Abb. 27.2 zeigt die weitgehende Auflösung des für geringfügig höhere Anströmgeschwindigkeit gerade besonders kräftig entwickelten Leewellenzuges (Abb. 27.1). Stattdessen tritt in einer Entfernung von einer halben Leewellenlänge stromabwärts oberhalb des Gipfels ein Rotor auf. Gleichzeitig mit dem Zusammenbruch des Wellensystems verschwindet die luvseitige Blockierung fast völlig und die Strömung folgt wieder weitgehend der Hanggeometrie. Dadurch verlagert sich das vorher durch die Luvblockierung noch weit stromaufwärts verschobene Steiggebiet wieder über den oberen Teil des Luvhanges. Das ist aber gerade das Gebiet, in dem aller Erfahrung nach größtes Steigen zu erwarten ist, wenn keine Leewellen existieren und keine wesentliche virtuelle Veränderung des luvseitigen Bergprofils durch Blockierung stattfindet (vgl. auch die Abb. 18.1-4, 23.1-4).

Die Bewertung dieses Ergebnisses ist etwas problematisch. Schon die Zuordnung des Strömungstyps von Abb. 27.2 zur FÖRCHTGOTT-Klassifikation bereitet Schwierigkeiten. Seiner Lage nach wäre der Höhenrotor zu identifizieren mit dem welleninduzierten Rotor der Fig. 3c in Abb. 24. Gegen diese Zuordnung spricht aber, daß die Amplitude der weitgehend aufgelösten Welle schon zu schwach ist, um zur Rotorbildung ausreichende gegenläufige Druckbeschleunigungen unterhalb der "Begrenzungsinversion" ($w(z=H)=0$) zu produzieren. Aus demselben Grund sind auch die zu den bodennahen Ablösungen gehörenden Rotoren (Abb. 27.1) verschwunden. So liegt es nahe, den auf den Wellenzusammenbruch folgenden Strömungstyp mit der "Rotorströmung" (Fig. 3d / Abb. 24) zu identifizieren. Gestützt würde dies durch die Übereinstimmung bezüglich der bodennahen Anströmung. Wie Abb. 27.2 von Abb. 27.1, so unterscheiden sich die Wellen- und Rotorströmung in Fig. 3c, 3d (Abb. 24) auch gerade dadurch, daß sich bei letzterer die bodennahe Anströmung dem Luvhang anschmiegt. Das Bild der Vertikalgeschwindigkeit (Abb. 27.2b) ließe sogar alle drei in Fig. 3d angedeuteten Rotoren in ihrer richtigen gegenseitigen Lage identifizieren.

Bezüglich der Sinkbewegung über dem Leehang vor dem Rotorbereich besteht dagegen weit weniger Übereinstimmung. Abb. 27.2b weist ein stärkstes Sinken mit $w = -1,7 \text{ m/s}$ aus, während vor dem Zusammenbruch der Welle dort noch $w = -5,0 \text{ m/s}$ erreicht wurde. In den vergleichbaren Fig. 3c, 3d der Abb. 24 sind die Verhältnisse gerade umgekehrt. Vor dem Rotorbereich wären danach viel stärkere Absinkbewegungen zu erwarten als innerhalb der Wellenströmung. Dadurch suggeriert Fig. 3d sehr stark ein atmosphärisches Analogon zum Wassersprung oder zumindest zur schießenden Bewegung in offenen Gerinnen (der deutschen Fachterminologie wohl schon weitgehend als "hydraulic jump" einverleibt). Von den Voraussetzungen her wäre am ehesten noch die KUETTNERsche Variante [33] des Wassersprunganalogons mit konstanter Energie anzuwenden, trotzdem wird

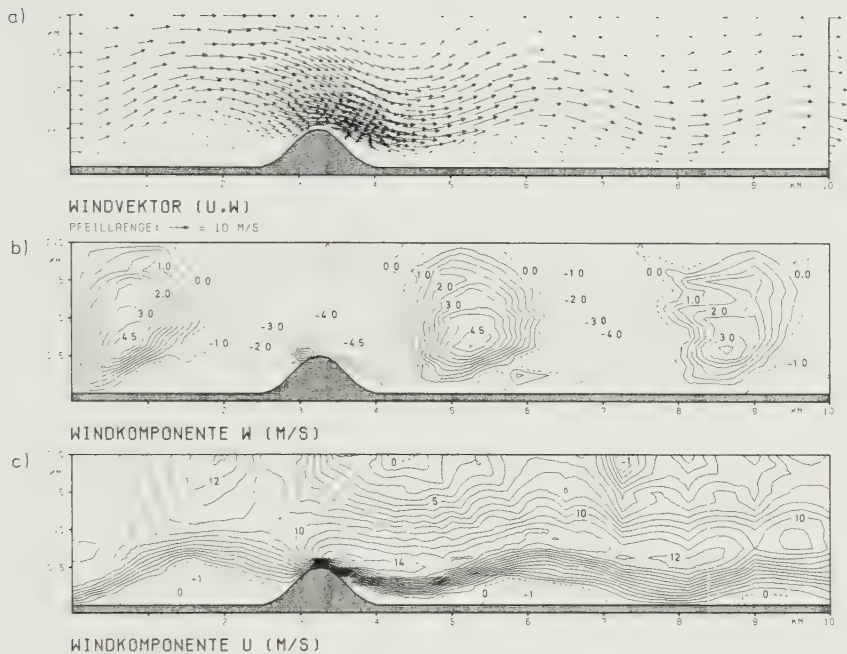


Abb. 27.1 : Bergüberströmung mit $u_g = 7 \text{ m/sec}$ und $\gamma_g = 0.20 \text{ K/100 m}$

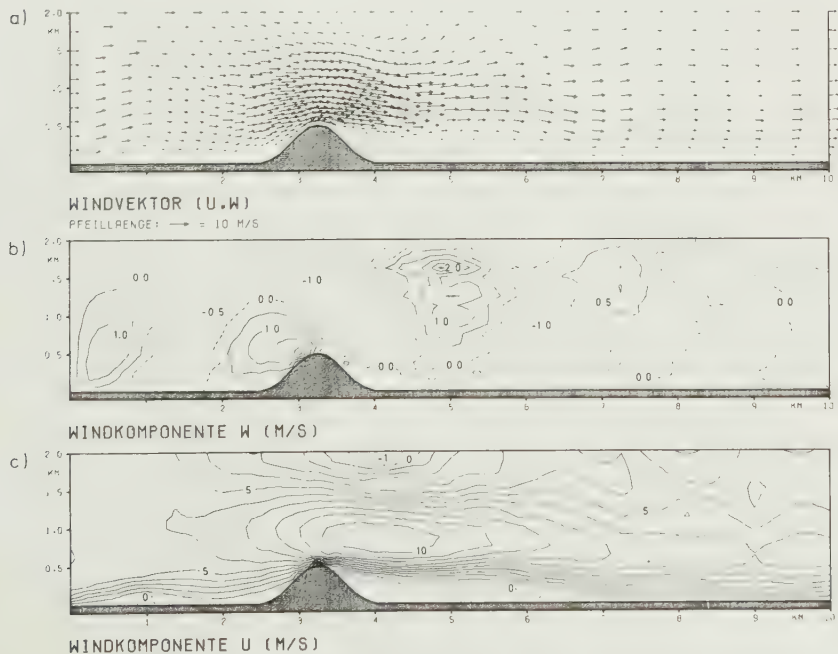


Abb. 27.2 : Bergüberströmung mit $u_g = 5 \text{ m/sec}$ und $\gamma_g = 0.20 \text{ K/100 m}$

(7mm Zusammenbruch des Lee-Wellensystems bei Unterschreitung einer

das Wassersprungsmodell in keinem Fall in die Diskussion der vorliegenden Ergebnisse einbezogen. Zwar wäre die Randbedingung $w(z=H) = 0$ kein Hindernis, weil die Idee, eine fehlende freie Oberfläche durch eine Inversion zu ersetzen, durchaus plausibel erscheint. Unter den geometrischen und dynamischen Bedingungen der hier durchgeführten Simulationen erreichen jedoch die auftretenden Beschleunigungen die gleiche Größenordnung wie die im Wassersprungsanalogon zu postulierende "reduzierte Schwerebeschleunigung" $\frac{\delta \theta}{\theta} g$, so daß die Voraussetzungen der Wassersprungsdeutung nicht mehr gegeben sind.

Abgesehen von der Schwierigkeit bei der Deutung bzw. Einordnung der in Abb. 27.2 gezeigten Strömungsform taucht hier aber noch ein grundsätzliches Modellproblem auf. Eine wesentliche Voraussetzung des vorliegenden Modells ist die plausible Annahme, daß sich i.a. bei stationären Randbedingungen und Quellfunktionen auch stationäre Strömungen einstellen. Wenngleich dies unter den meisten Bedingungen erfüllt sein dürfte, gibt es Ausnahmefälle, wo es trotz stationärer Randbedingungen zu periodisch instationären Strömungen kommt. Das wohl bekannteste Beispiel hierfür ist die KARMANSche Wirbelstraße. Allein die Tatsache, daß die gegenseitige Lage der sich in Abb. 27.2 abzeichnenden Steig- und Sinkgebiete gerade der Verteilung der KÁRMÁN-Wirbel in ihrer stabilsten Form entspricht, muß zur Vorsicht mahnen. Die Untersuchung, ob Abb. 27.2 eine mögliche stationäre Strömung repräsentiert oder ob das zusammenbrechende Wellensystem von einer periodisch instationären Bewegung abgelöst wird, überschreitet sowohl den Rahmen als auch das Anliegen dieser Arbeit. Unabhängig davon bleibt als qualitatives Ergebnis, daß gut entwickelte Leewellensysteme, die nach oben durch eine Inversion begrenzt sind, in kritischen Bereichen der Anströmgeschwindigkeit und Schichtungsstabilität bei geringfügiger Windabnahme oder Stabilisierung relativ unvermittelt zusammenbrechen können. Eine solchermassen verursachte Leewellenauflösung dürfte z.B. für Segelflieger viel schwerer vorhersagbar sein als das Absterben eines Leewellensystems infolge einsetzender Leehangthermik.

Das neben den Leewellen bedeutungsvollste Phänomen bei der An- bzw. Überströmung steiler Topographie ist die *Grenzschichtablösung*, meist verbunden mit bodennaher Gegenströmung und Rotoren. Bei großen Hangneigungen können insbesondere die leeseitigen "Totwassergebiete" bzw. die Leerrotoren große Ausdehnungen von mehreren Kilometern erreichen (QUENEY [56]). Nach HUNT [30] kann man bei neutraler Schichtung größenordnungsmäßig mit einer leeseitigen Rückströmung auf einer Länge vom 10fachen der Berghöhe rechnen. Bei sehr steilen Leehängen sind noch weiter stromabwärts reichende Ablösgebiete zu erwarten. Sowohl die Abbildungen 18.1-4 und 23.1-4 als auch die folgende Analyse (s.u. Abb. 28) bestätigen den Richtwert von HUNT. Große Ablösungsausdehnungen gehörten auch zu den auffälligsten Ergebnissen der Wassertankexperimente mit geschichteten Salzlösungen von LONG [36] und DAVIS [13].

Gerade angesichts ihrer großen räumlichen Ausdehnung ist erstaunlich, wie wenig Beachtung den Ablösungserscheinungen etwa im Vergleich zu den Leewellen bei mesometeorologischen Untersuchungen bisher geschenkt wird. Im Rahmen der technischen Hydrodynamik bilden die vielfältigen, praktisch nur experimentell und numerisch

zugänglichen Ablösungen sowohl in laminaren als auch in turbulenten Strömungen ein zentrales Problem. Ihre Bedeutung erklärt sich dort daraus, daß die größten Impulsverluste bei Strömungen um Ecken, durch Krümmen oder Rohre mit veränderlichem Querschnitt immer da entstehen, wo Ablösungen auftreten. Diese zum großen Teil aus dem Druckwiderstand eines umströmten Hindernisses resultierenden Impulsverluste sind jedoch auch in der Meteorologie aller räumlichen "Scales" von Bedeutung. So sind die an langgestreckten Bergzügen auftretenden Impulsverluste für die Dynamik der großräumigen Zirkulation nicht mehr vernachlässigbar. Eine grobe Vorstellung vom Druckwiderstand vermitteln schon die Bodendruckkurven in Abb. 19: Im Luv ist der Druck positiv und erreicht die Größenordnung des Staudrucks (mit $u = 5 - 10 \text{ m/s}$ bis zum Gipfelniveau wird $\rho u^2/2 \approx 0,1 - 0,5 \text{ mb}$), im Lee bleibt er dagegen in der Regel im gesamten Auslaufgebiet negativ. Auch im Mesoscale wird der Gesamtwiderstand eines überströmten Bergrückens u.a. die Länge der Nachlaufströmung hinter dem Ablösegebiet beeinflussen. Schließlich ist bekannt, daß der resultierende Winddruck an Gebäuden wesentlich von der Lage und Ausdehnung der Ablösegebiete abhängt.

Ein ganz anderer meteorologischer Aspekt der Ablösungen scheint aber bisher weitgehend unberücksichtigt geblieben zu sein. Bezüglich des diffusiven und vor allem des konvektiven Abtransports von Schadstoffansammlungen und Wärmeüberschüssen dürfte die Grenzschichtablösung mindestens von gleicher Bedeutung sein wie die Transport Sperre in Gestalt einer Inversion. Denkt man sich etwa in einer der Abbildungen 18.1-4 einen bodennahen Schadstoffemittenten in der Umgebung des Leehanges, so wird klar, daß u.U. die Sperrwirkung einer Ablösung lokal diejenige einer Temperaturinversion noch übertreffen kann. Abgesehen von der relativ niedrigen Höhe des Ablösegebietes wird durch die eingelagerte Rotorströmung auch noch ein horizontaler Abtransport von Luftbeimengungen behindert.

Qualitativ ist die Erklärung der Ablösung und der Rückströmung sehr einfach. Notwendige und meist auch hinreichende Bedingungen für Grenzschichtablösung sind 1) ein dynamisch bzw. bei geschichteter Strömung hydrostatisch induzierter bodennaher Druckgradient in Richtung der Anströmung und 2) der reibungsbedingte Impulsverlust in der bodennahen Grenzschicht. Bei ausreichend großer gegenläufiger Druckbeschleunigung stagniert die ohnehin verzögerte Grenzschichtströmung bzw. wird in der Regel sogar rückläufig.

Eine *quantitative* Erfassung der Ablösevorgänge ist im Rahmen der hydrodynamischen Theorie dagegen fast unmöglich und man kommt selbst bei idealisierten geometrischen Bedingungen kaum über die Abschätzung des Ablösepunktes hinaus. Das liegt einerseits daran, daß die üblichen Grenzschichtannahmen bestenfalls bis zu diesem Punkt gelten, andererseits und vor allem aber an der Rückkoppelung der Ablösung auf die Strömung oberhalb der Grenzschicht bzw. die Strömung vor dem Ablösepunkt. Hierauf wurde schon bei der Diskussion der Abbildungen 18 und 23 im Zusammenhang mit der virtuellen Veränderung des Bergprofils infolge leeseitiger Grenzschichtablösung eingegangen. So dürften meßtechnische Erfassungen und numerische Simulationen von Ablösevorgängen mindestens ebenso wichtig sein, wie quantitative Untersuchungen der Leewellen, für die sich theoretisch wesentlich weitergehende Abschätzungen machen lassen.

Deshalb sollen die Ergebnisse der durchgeführten Überströmungssimulationen mit verschiedenen Anströmstärken und Schichtungsstabilitäten genutzt werden für eine Analyse der räumlichen Erstreckung des leeseitigen Ablösegebietes in Abhängigkeit von diesen beiden Parametern.

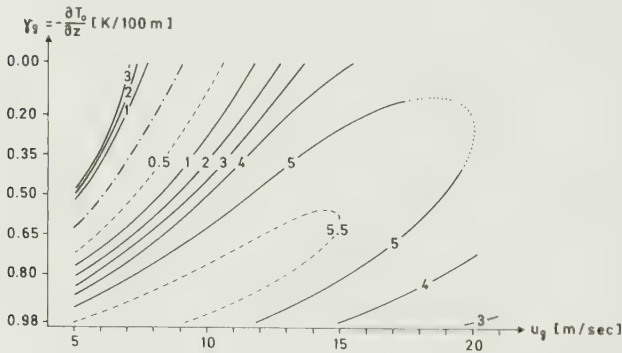


Abb. 28 : Horizontale Erstreckung [km] der Leeablösung in Abhängigkeit von u_g und γ_g

Zunächst ist auffällig, daß selbst für neutrale und schwach stabile Schichtung die Länge der Ablösung nicht unbegrenzt mit wachsender Anströmstärke zunimmt. Geht man z.B. entlang der Linie $\gamma_g = 0.98$ K/100 m von links nach rechts, dann erkennt man, daß die Ablösung bei zunehmender Anströmstärke zunächst immer weiter stromabwärts reicht. Das ist zu erwarten, weil die durch Betrags- und Richtungsbeschleunigungen induzierten dynamischen Druckstörungen mit wachsendem u_g zunehmen. Entsprechend größer werden die der Grenzschicht aufgeprägten gegenläufigen Druckbeschleunigungen in Bodennähe. Hinge die Erstreckung der Ablösungen in dieser Weise allein von der Geschwindigkeitsverteilung oberhalb der Reibungsschicht ab, dann wäre nicht verständlich, warum die Ausweitung des Leewirbels oberhalb einer schichtungsabhängigen Anströmstärke stagniert und mit weiter wachsendem u_g sogar rückläufig wird (bei mittlerer Schichtungsstabilität von 0.65 K/100 m erreicht das Ablösegebiet für etwa $u_g = 14$ m/s seine größte Ausdehnung, bei neutraler Schichtung schon für $u_g = 8$ m/s). Dieses Maximum erklärt sich vielmehr aus der Zunahme des vertikalen turbulenten Impulstransportes mit wachsender Anströmstärke. Wie schon die Profilfolge in Abb. 21 bestätigt, werden die vertikalen Windscherungen über einem überströmten Berg und im Übergangsgebiet zwischen dem Leerotor und der Strömung oberhalb der abgehobenen Grenzschicht ohnehin wesentlich größer als im Grenzschichtbereich der ungestörten Anströmung. Entsprechend höher ist dort der zum Boden gerichtete turbulente Impulstransport. Dies wurde auch durch die Verteilung der turbulenten Viskosität in Abb. 20 bestätigt. K_M erreichte dort (für $u_g = 10$ m/s und $\gamma_g = 0.65$ K/100 m) über dem Gipfel und stromabwärts vom Ablösepunkt in der abgehobenen Grenzschicht das zwei- bis vierfache der Maximalwerte vor dem Luvhang.

Für genügend große u_g wird nun die Beschleunigung in Richtung der Anströmung durch den turbulenten Impulsaustausch so groß, daß sie die ebenfalls weiter anwachsende Verzögerung der bodennahen Strömung durch die gegenläufigen Druckbeschleunigungen überkompensiert. Als Folge davon legt die Strömung mit wachsendem u_g wieder zunehmend früher stromabwärts an. Dies soll exemplarisch anhand der Abb. 29 dokumentiert werden.

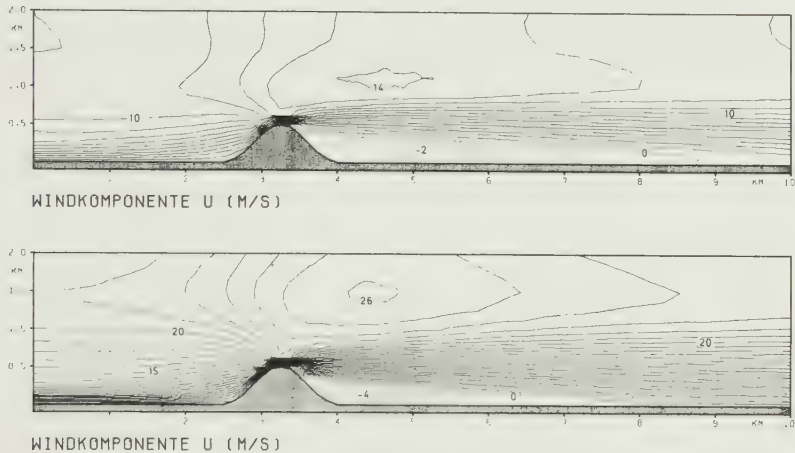


Abb. 29 : Zur Verkürzung der Leeablösung mit zunehmender Anströmstärke

$\left. \begin{array}{l} \text{oben : } u_g = 10 \text{ m/sec} \\ \text{unten : } u_g = 20 \text{ m/sec} \end{array} \right\} \text{ jeweils bei neutraler Schichtung}$

Die obere Abbildung zeigt das $u(x,z)$ -Feld für $u_g = 10 \text{ m/s}$, die untere die u -Verteilung für doppelte Anströmstärke. Trotz weiterer Intensivierung des Leewirbels hat sich das Ablösegebiet von etwa 5,2 km bei $u_g = 10 \text{ m/s}$ auf nur noch 3,1 km Länge für $u_g = 20 \text{ m/s}$ verkürzt. Gleichzeitig ist auch die vertikale Erstreckung des Leewirbels deutlich geringer geworden. Die größten Werte der berechneten turbulenten Viskosität unmittelbar über und hinter dem Ablösepunkt sind bis zu viermal höher als die entsprechenden Maximalwerte für $u_g = 10 \text{ m/s}$.

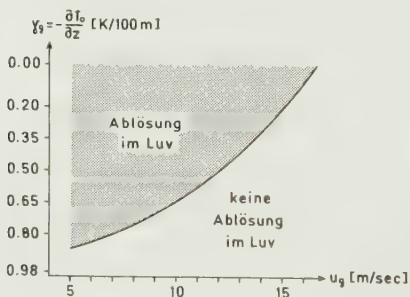
Die obige Begründung erklärt auch die Schichtungsabhängigkeit derjenigen Anströmstärke, von der ab das Ablösegebiet nicht weiter anwächst bzw. sich wieder zusammenzieht (s. Abb. 28), denn die Turbulenzintensität nimmt mit wachsender Stabilität rasch ab.

Einen zweiten auffälligen Befund liefert der linke obere Teil der Abb. 28. Von der kritischen Kurve für Leewellenanregung (vgl. Abb. 25) aus zu höheren Stabilitäten bzw. geringeren Anströmstärken verkürzt sich die leeseitige Ablösung kontinuierlich und verschwindet in der

Umgebung der strichpunktierten Linie schließlich ganz. Für noch weitere Stabilisierung oder abnehmende Windstärke tritt dann aber erneut Ablösung ein und dehnt sich praktisch "sprunghaft" wieder über 3 km Länge aus. Mit Hilfe der vorangegangenen Diskussion der Leewellen ist das leicht zu erklären: Sobald sich Leewellen bilden, wirkt das mit ihnen verbundene Sinken über dem Leehang der Ablösung entgegen. Mit zunehmender Intensivierung der Welle wird der Leewirbel immer mehr eingeschnürt und schließlich ganz unterdrückt. Dies konnte schon in den Abbildungsreihen 18 und 23 gut verfolgt werden. Bei Erreichen des in Abb. 25 gerasterten Gebietes der $\{u_g, \gamma_g\}$ -Parameterebene bricht dann das Wellensystem zusammen. Ebenso spontan, wie sich der Wellenzusammenbruch mit geringfügiger Windabnahme oder Stabilisierung vollzieht, dehnt sich die nicht mehr durch die Leewelle behinderte Ablösung stromabwärts aus. Diese Korrelation beider Vorgänge kommt sehr klar im Vergleich der Abbildungen 25 und 28 heraus: Die Isolinien der Ablösungsbereichslänge drängen sich genau am Rand des gerasterten Gebietes im Leewellenlängendiagramm, der den Beginn der Wellenauflösung markiert. Sehr anschaulich präsentiert sich die mit der Wellenauflösung einhergehende spontane "Wiederbelebung" der Ablösung am Beispiel der Abb. 27.

Unter den meisten Bedingungen sind die Ablöseerscheinungen im Luv wesentlich schwächer ausgeprägt als die leeseitigen Ablösungen und Rotoren. Entsprechend geringer ist ihre Bedeutung hinsichtlich der Unterbindung von Wärme- und Schadstofftransporten. Für den Gesamtwiderstand, den der Berg der Anströmung entgegensetzt, ist die Luvblockierung und die dadurch bewirkte virtuelle Veränderung des Luvhangprofils jedoch von mindestens ebensolcher Bedeutung wie die Ablösung im Lee. Es wurde bereits darauf hingewiesen, daß bei großer Schichtungsstabilität und geringer Anströmstärke der Einfluß des Berges bzw. der Luvblockierung stromaufwärts bis zum Einströmrand und wahrscheinlich sogar über diesen hinaus reicht. Das ist z.B. auch in Abb. 27.1 wieder deutlich erkennbar.

Auf eine quantitative Analyse der luvseitigen Ablösung und Blockierung in Abhängigkeit von u_g und γ_g auf der Basis der vorliegenden Ergebnisse muß daher verzichtet werden. Hierfür müßte der Einströmrand erheblich weiter stromaufwärts vorgeschoben werden.



Solange die luvseitige Ablösung nicht wesentlich über 1,5 km stromaufwärts reichte, blieb die Einströmrandbedingung jedoch kompatibel mit der Dynamik im Anströmbereich (vgl. Abb. 18 und 23). So sollte mindestens die für das Einsetzen der Luvablösung kritische Kurve auf der $\{u_g, \gamma_g\}$ -Parameterebene in Abb. 30 noch verlässlich sein.

Abb. 30: Zur Luvablösung

VARIATION DER ANSTRÖMUNGSRICHTUNG

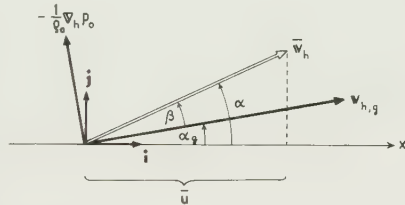
Die numerischen Experimente zum Einfluß der *Richtung* der treibenden Druckbeschleunigung $-\frac{1}{\rho_0} \nabla_h p_0$ wurden für $|\mathbf{v}_{h,q}| = 10 \text{ m/s}$ durchgeführt und auf die beiden Schichtungsstabilitäten $\gamma_q = 0.65 \text{ K/100 m}$ bzw. 0.20 K/100 m beschränkt. Dabei wurde die Richtung des dynamischen Antriebs in einem Winkelbereich von 120° um jeweils 15° so variiert, daß $\mathbf{v}_{h,q}$ mit der positiven x-Achse Winkel zwischen $+60^\circ$ und -60° einschloß. Wegen der vertikalen Windscherung in der ungestörten *EKMAN*-Gleichgewichtsströmung ist zunächst unklar, welche *Anströmrichtungen* den jeweiligen Richtungen α_q von $\mathbf{v}_{h,q}$ zuzuordnen sind. Eine plausible Definition der Anströmung α ist

$$\alpha = \alpha_q + \beta \quad \text{mit}$$

$$\cos \beta = \mathbf{v}_{h,q}^0 \cdot (\bar{\mathbf{v}}_h(x=0))^0 \quad \text{und}$$

$$\bar{\mathbf{v}}_h(x=0) = \frac{1}{h_q} \int_0^{h_q} \mathbf{v}_h(0,z) dz,$$

d.h., α wird als Richtung der vertikal über die Berggipfelhöhe h_q gemittelten *EKMAN*-Anströmung aufgefaßt. (Zu den Winkelbezeichnungen s. die nebenstehende Skizze.)



Eine Abschätzung für den Winkel β ermöglichen die Hodographen der Gleichgewichtsströmungen für $\mathbf{v}_{h,q} = u_q \mathbf{i}$ in Abb. 10. Mit der Approximation

$$\int_0^{h_q} \mathbf{v}_h(0,z) dz \approx \sum_{i=1}^5 \mathbf{v}_h(0, (i - \frac{1}{2}) \delta z) \delta z \quad (\delta z = 100 \text{ m})$$

ergibt sich für die vertikal gemittelte Anströmung grob

$$\beta \approx 18^\circ \quad \text{und} \quad |\bar{\mathbf{v}}_h| \approx 0,83 |\mathbf{v}_{h,q}| \quad \text{bei} \quad \gamma_q = 0.65 \text{ K/100 m}$$

$$\text{bzw.} \quad \beta \approx 15^\circ \quad \text{und} \quad |\bar{\mathbf{v}}_h| \approx 0,84 |\mathbf{v}_{h,q}| \quad \text{bei} \quad \gamma_q = 0.20 \text{ K/100 m}.$$

Das bedeutet insbesondere, daß sich bei der gewählten Gipfelhöhe ($h_q = 500 \text{ m}$) eine schwerpunktmäßig hangnormale Anströmung ergibt, wenn $\mathbf{v}_{h,q}$ gegenüber der Hangachsennormalen $\mathbf{i}$ um $\alpha_q \approx 15^\circ - 18^\circ$ nach rechts gerichtet ist. $\bar{u}$ ist die hangnormale Komponente der über die Gipfelhöhe gemittelten Anströmung $\bar{\mathbf{v}}_h$. Abbildung 31 zeigt ihre Abhängigkeit von der Richtung α_q des geostrophischen Windvektors, jeweils in % von $|\mathbf{v}_{h,q}|$ aufgetragen. Für gleiche positive und negative Winkel α_q ergeben sich danach sehr unterschiedliche Komponenten $\bar{u}$ der schwerpunktmäßigen Hanganströmung $\bar{\mathbf{v}}_h$. So ist z.B. $\bar{u}$ für $\alpha_q = -45^\circ$ (Rechtsablenkung von $\mathbf{v}_{h,q}$ gegenüber $\mathbf{i}$) doppelt so groß wie für $\alpha_q = +45^\circ$. "Symmetrische" Ergebnisse für gleichgroße positive und negative Winkel α_q waren daher von vornherein nicht zu erwarten. Andererseits hat sich die plausibel erscheinende Vermutung, daß die für die $(u\mathbf{i} + w\mathbf{k})$ -Windkomponente maßgebliche Dynamik im wesentlichen von $\bar{u}$ abhängt, in den numerischen Simula-

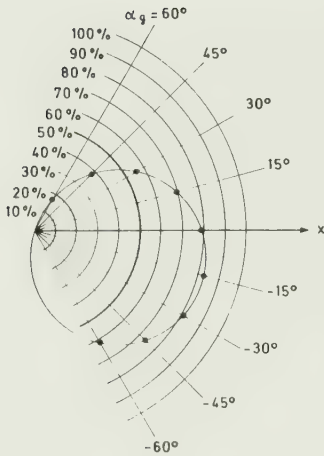


Abb. 31: Abhängigkeit der schwerpunktmäßigen Hanganströmungskomponente $\bar{u}$ von der Richtung α_g des geostrophischen Windvektors (in % von $|\mathbf{v}_{h,g}|$)

des Steiggebietes eingesetzt. Sowohl im u - als auch im w -Feld zeichnet sich eine sehr schwache Leewelle mit entsprechend großer Wellenlänge ($\lambda > 8 \text{ km}$) ab. Die leeseitige Ablösung ist stromabwärts auf 2 km Länge beschränkt und enthält nur einen schwachen Rotor. Ein Vergleich mit der Abbildungsserie 18 zur $|\mathbf{v}_{h,g}|$ -Variation zeigt, daß Abb. 32.1 zwischen Abb. 18.4 und 18.5 anzusiedeln wäre. D.h., die Schräganströmung mit $\alpha_g = -45^\circ$ und $|\mathbf{v}_{h,g}| = 10 \text{ m/s}$ ($\bar{u} = 7,4 \text{ m/s}$) erzeugt ein ähnliches Überströmungsbild, wie die Anströmung mit $\alpha_g = 0^\circ$ und $|\mathbf{v}_{h,g}| = 7,5 \text{ m/s}$, für die $\bar{u}$ nach Abb. 31 mit 5,9 m/s um 1,5 m/s kleiner ist.

Abb. 32.2 zeigt für linksgerichtete Anströmung mit fast gleicher Komponente der schwerpunktmäßigen Hanganströmung ($\bar{u} = 7,0 \text{ m/s}$) einen ganz anderen Strömungstyp als Abb. 32.1. Entsprechend der fehlenden Blockierung im Luv liegt das um 1 m/s stärkere maximale Steiggebiet unmittelbar über dem oberen Teil des angeströmten Hangs und die Strömung ist wellenfrei. Die leeseitige Ablösung reicht mehr als doppelt so weit stromabwärts wie im Fall der bezüglich $\bar{u}$ vergleichbaren rechtsgerichteten Anströmung. Sie erreicht damit nach Abb. 28 fast die für diese Bergtopographie maximal mögliche Ausdehnung. Das Strömungsbild ist sehr ähnlich demjenigen der Abb. 18.3, das sich für die Anströmung mit $\alpha_g = 0^\circ$ und $|\mathbf{v}_{h,g}| = 9 \text{ m/s}$ ergab.

Die gemittelte hangnormale Komponente der Anströmung eignet sich

tionen nicht bestätigt. Danach hätten sich für richtungs- und betragsmäßig verschiedene $\mathbf{v}_{h,g}$ mit gleicher Komponente $\bar{u}$ der zugehörigen schwerpunktmäßigen Hanganströmung ähnliche Verteilungen $u(x,z)$ und $w(x,z)$ ergeben sollen. Das konnte bei mittlerer Schichtungsstabilität $\gamma_g = 0,65 \text{ K/100 m}$ jedoch nur für den kleinen Sektor $0^\circ \geq \alpha_g \geq -30^\circ$ und bei $\gamma_g = 0,20 \text{ K/100 m}$ überhaupt nicht verifiziert werden. Exemplarisch soll dies in Abbildung 32 demonstriert werden. Abb. 32.1 a,b zeigt die u - und w -Verteilungen, die sich bei $\gamma_g = 0,65 \text{ K/100 m}$ für $\alpha_g = -45^\circ$ ergaben. Die entsprechenden Felder in Abb. 32.2 a,b sind Ergebnisse der Anströmungen mit $\alpha_g = +15^\circ$ bei gleicher Stabilität. In beiden Fällen war die Komponente $\bar{u}$ der vertikal gemittelten Hanganströmung nach Abb. 31 fast gleich groß, nämlich etwas mehr als 7 m/s.

Bei der rechtsseitigen Anströmung hat schon Luvblockierung mit der dadurch bedingten Vorverlagerung

somit nicht als Richtwert für die Abschätzung der zu erwartenden Überströmungsform. Die "Asymmetrie" der Ergebnisse für links- bzw. rechtsgerichtete Anströmung mit gleicher $\bar{u}$ -Komponente läßt sich anhand der $u(x=0, z)$ -Profile verstehen, die jeweils am Einströmrand der Abb. 32.1 a, 32.2 a eingetragen sind. Danach nämlich kommen die jeweils gleichen $\bar{u}$ als Ergebnis der Mittelung über sehr unterschiedliche Profile im Bereich $0 \leq z \leq h_0$ zustande. Für die Schräganströmung mit $\alpha_0 = -45^\circ$ resultiert ein $u(0, z)$ -Profil mit wesentlich größerer vertikaler Scherung im unteren Hangbereich, dafür aber deutlich kleineren Geschwindigkeiten oberhalb der Gipfelhöhe als im Fall der linksgerichteten Anströmung. Nach der Diskussion der Simulationen zur $|v_{h,0}|$ -Variation (s. insbesondere Abb. 25) ist so verständlich, daß sich im Gegensatz zu Abb. 32.2 in Abb. 32.1 schon Wellenbildung andeutet.

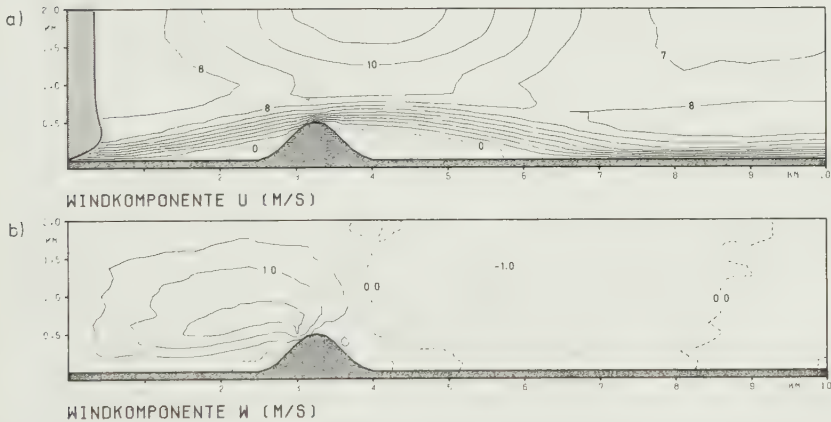


Abb. 32.1 : Schräganströmung mit $\alpha_0 = -45^\circ$ ($|v_{h,0}| = 10 \text{ m/s}$, $\gamma_0 = 0.65 \text{ K/100 m}$)

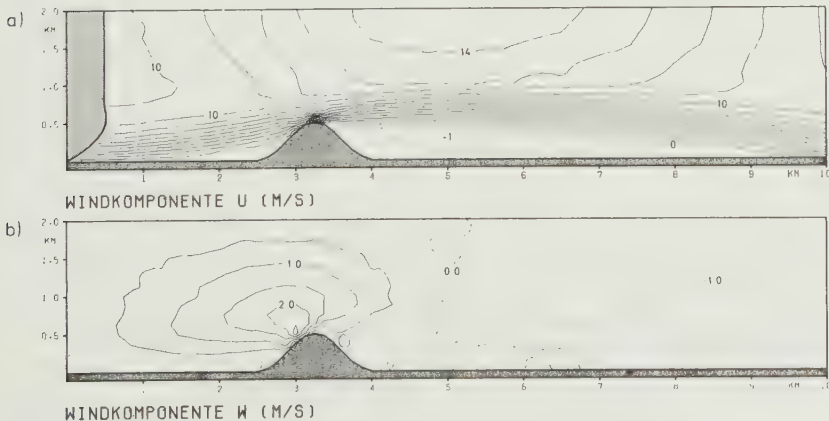


Abb. 32.2 : Schräganströmung mit $\alpha_0 = +15^\circ$ ($|v_{h,0}| = 10 \text{ m/s}$, $\gamma_0 = 0.65 \text{ K/100 m}$)

Die numerischen Experimente mit der höheren Schichtungsstabilität $\gamma_g = 0.20 \text{ K}/100 \text{ m}$ zeigten eine qualitativ andere Abhängigkeit von der Anströmrichtung. Während sich hier überhaupt keine Ähnlichkeit von Lösungen für verschiedene α_g , aber gleiche $\bar{u}$ zeigte, entstanden im Sektor $30^\circ \geq \alpha_g \geq -30^\circ$ ähnliche Ergebnisse für links- und rechtsgerichtete Anströmung mit gleicher u_g -Komponente. Das deutet darauf hin, daß mit steigender Schichtungsstabilität u_g zunehmend maßgeblich für die Entwicklung des $(u\bar{i} + w\bar{k})$ -Überströmungsfeldes wird. Mit Rücksicht darauf, daß in fast allen Simulationen mit der höheren Schichtungsstabilität das Leewellensystem gut entwickelt war, ist auch das verständlich: Die Struktur der Leewellen hängt im wesentlichen von den Eigenschaften der ungestörten Strömung ab, und auf dem überwiegenden Anteil des Strömungsquerschnittes ($300 \text{ m} \leq z \leq 2000 \text{ m}$) ist $u(z) \approx u_g$. Dagegen ist die schwerpunktmäßige Hanganströmung $\bar{u}$ über die erzeugene Vertikalgeschwindigkeit vor dem Luvhang bzw. dem Blockierungsgebiet in erster Linie nur für die *Auslösung* der Welle maßgeblich.

Diese exemplarische Diskussion deutet an, was die Zusammenschau aller Ergebnisse zur Variation der Anströmrichtung bestätigte: Griffige Zusammenhänge lassen sich praktisch nicht gewinnen, weil sich weder die hangnormale Komponente u_g des geostrophischen Windvektors noch die Komponente $\bar{u}$ der schwerpunktmäßigen Hanganströmung als einheitliche Ordnungsparameter für eine quantitative Auswertung eignen.

Mit einiger Vorsicht lassen sich nur folgende qualitative Aussagen machen: Bei bezüglich der Hangachsennormalen symmetrischen geostrophischen Windvektoren wird die Blockierung von der linksgerichteten Anströmung begünstigt. Dafür ist die Ablösung im Lee weniger weit ausgedehnt als bei der entsprechenden rechtsgerichteten Anströmung. Der weiter oben diskutierte Zusammenbruch des Leewellensystems bei Unterschreiten einer kritischen Anströmstärke (Abb. 27) tritt erwartungsgemäß auch für kritische Winkel α_g der Überströmungsrichtung auf. Bei gleichen Beträgen $|v_{h,g}|$ und γ_g ist jedoch für $\alpha_g < 0$ Wellenbildung noch für schrägere Anströmung möglich als für $\alpha_g > 0$. Im Winkelbereich $30^\circ \geq \alpha_g \geq -30^\circ$ kann die hangnormale Komponente von $v_{h,g}$ als Richtwert für die Abschätzung der ggf. zu erwartenden Leewellenlänge benutzt werden.

An dieser Stelle soll noch auf eine Erscheinung eingegangen werden, die zwar keine Folge der *schrägen* Anströmung ist, bei dieser aber besonders augenfällig wird. Sie betrifft die hangparallele Windkomponente v und ist als ein Kanalisierungseffekt aufzufassen, der in den numerischen Simulationen unterhalb der Gipfelhöhe insbesondere im Lee des Berges auftrat (vgl. die Abbildungen 18 und 23, jeweils d).

Abb. 33 zeigt die zu Abb. 32.1 gehörende $v(x,z)$ -Verteilung für rechtsgerichtete Anströmung mit $|v_{h,g}| = 10 \text{ m/s}$ und $\alpha_g = -45^\circ$ bei einer Schichtungsstabilität mit $\gamma_g = 0.65 \text{ K}/100 \text{ m}$. Nach Abb. 10 ist für diesen Fall der bodennahe Wind der ungestörten Anströmung um etwa 36° gegenüber $v_{h,g}$ nach links abgelenkt, d.h. die *EKMAN*-Gleichgewichtsströmung mit $\alpha_g = -45^\circ$ produziert nur negative v -Komponenten. Abb. 33 bestätigt das für den noch weitgehend ungestörten Anströmbereich, für die Strömung in bzw. oberhalb der abgehobenen

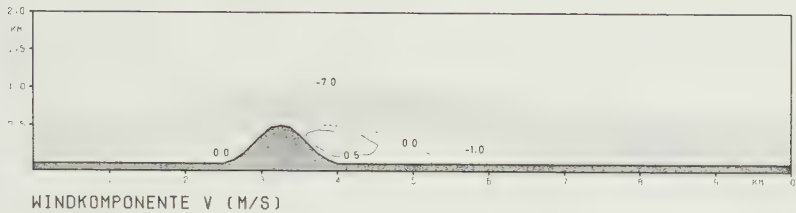


Abb. 33 : $v(x, z)$ -Verteilung bei Schräganströmung mit $\alpha_g = -45^\circ$
($|v_{h,g}| = 10 \text{ m/sec}$, $\gamma_g = 0.65 \text{ K/100 m}$)

Grenzschicht und auch in der gesamten Nachlaufströmung stromabwärts vom Ablösegebiet. Dagegen hat sich jedoch innerhalb des leeseitigen Ablösegebietes und andeutungsweise auch in der stagnierenden Strömung im unteren Luvhangbereich eine entgegengesetzte hangparallele Strömungskomponente entwickelt.

Im zweidimensionalen Modell kann dieses Phänomen nicht über das dynamische Stördruckfeld erklärt werden, da voraussetzungsgemäß $\partial p / \partial y = 0$ ist. Wegen der sehr kleinen u - und w -Komponenten im "Totwassergebiet" kommt nur *eine* Beschleunigung in Betracht, die diese positive Querkomponente erzeugen kann, nämlich die von der Verteilung des quasistatischen Druckes im Grundzustand hervorbrachte treibende Druckbeschleunigung $-\frac{1}{\rho_0} \nabla_h p_0$. Diese verbleibt im Ablösegebiet unabhängig vom Strömungszustand, während dort die kompensierende CORIOLIS-Beschleunigung praktisch verschwunden ist. Unter diesen Bedingungen entfaltet die Dynamik "unter dem Schutz" der abgehobenen Grenzschicht ein vom übrigen Gebiet völlig verschiedenes Eigenleben: Die Strömung strebt hier näherungsweise gegen ein Gleichgewicht von treibender Druckbeschleunigung und Reibungsbeschleunigung. Für die hangparallele Windkomponente gilt dann im "Totwasserbereich" näherungsweise die Gleichgewichtsbedingung $\frac{\partial}{\partial z} (K_M \frac{\partial v}{\partial z}) = -f u_g$. Da sowohl am Boden als auch angenähert an der Untergrenze h^* der abgehobenen Grenzschicht v verschwindet, d.h. $v(0) = v(h^*) = 0$, ist im Bereich $0 \leq z \leq h^*$ das Modell der Kanalströmung realisiert. (Falls mit Rücksicht auf den vertikalen turbulenten Impulstransport $v(h^*) \neq 0$ zugelassen wird, hat man eine Kombination aus Kanal- und COUETTE-Strömung.)

Damit lassen sich zumindest qualitativ die $v(z)$ -Profile im Bereich der Luv- und Leeablösungen verstehen. Mit dem einfachen Modell der Kanalströmung, das für $K_M = \text{const}$ ein parabolisches Geschwindigkeitsprofil liefern würde, ergibt sich für den Fall der Schräganströmung mit $\alpha_g = -45^\circ$ die Idealisierung in Abb. 34 a, die genau dem aus Abb. 33 zu entnehmenden berechneten Profil entspricht. Im Profil (3b) ist gegenüber (3a) der Einfluß des vertikalen turbulenten Impulstransportes in der Umgebung der Ablöselinie $z = h^*(x)$ berücksichtigt. Ebenso zwanglos erklärt sich bei dieser Deutung der "Knick" im $v(z)$ -Profil, der bei allen Simulationen zur linksgerichteten bzw. senkrechten Überströmung ($\alpha_g \geq 0$) auftrat (vgl. Abbildung 34 b mit den berechneten Profilen in Abb. 21).

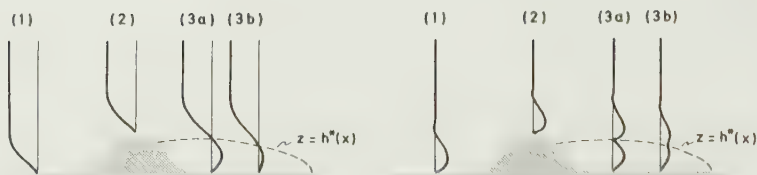


Abb. 34: $v(z)$ -Profilentwicklung (idealisiert) für

a) Schrägüberströmung mit $\alpha_g = -45^\circ$ b) senkrechte Überströmung ($\alpha_g = 0^\circ$)

ASYMMETRISCHE TOPOGRAPHIEPROFILE

Die numerischen Experimente zur Variation der Luv- und Leehangneigung ergaben eine nur schwache Abhängigkeit aller charakteristischen Überströmungserscheinungen von der Hangsteilheit. Damit wurden die experimentellen und analytischen Befunde von LONG [37] und KAO [32] bestätigt: Sowohl die leeseitigen Wellen und Ablösungen bzw. Rotoren als auch die Blockierung im Luv hängen im wesentlichen von den Eigenschaften der Strömung und der Höhe des Hindernisses ab, dagegen vergleichsweise wenig von dessen Form. In diesen Arbeiten werden die Ergebnisse zu folgenden Ähnlichkeitsaussagen bezüglich einer modifizierten, mit der Hindernishöhe und der Auftriebsbeschleunigung gebildeten *FROUDE*-Zahl zusammengefaßt: Kleine *FROUDE*-Zahlen unterhalb eines kritischen Wertes (bei gegebener Berghöhe realisiert durch hinreichend geringe Anströmgeschwindigkeiten oder hohe Schichtungsstabilität) sind kennzeichnend für weit stromaufwärts reichende Luvblockierungen sowie Leewellen mit großer Amplitude. Auch die leeseitige Ablösung ist im wesentlichen durch die *FROUDE*-Zahl bestimmt. Eine signifikante Abhängigkeit von der Hangform ergibt sich dagegen nur im Luv, indem hier die vertikale Erstreckung der Blockierung mit zunehmender Steilheit des angeströmten Hanges wächst.

Bezüglich der internen Parameter deckt sich dieser Befund mit allen Ergebnissen der hier durchgeführten Simulationen zur Variation von $|v_{h,g}|$ und γ_g . Ebenso bestätigen die Experimente zur Variation der Hangsteilheit, daß lediglich die unmittelbare Hanganströmung von der Neigung des Luvhanges abhängt. Dies soll exemplarisch für die bezüglich $v_{h,g}$ hangnormale Überströmung mit $|v_{h,g}| = 10 \text{ m/s}$ und $\gamma_g = 0.65 \text{ K/100m}$ gezeigt werden. In Abb. 35.1 ist der Leeang, in Abb. 35.2 der Luvhang gegenüber der symmetrischen Topographie aufgestellt.

Die leeseitige Ablösung reicht in beiden Fällen fast gleich weit stromabwärts, wobei die maximale bodennahe Gegenströmung bei steilem Luvhang mit $-2,0 \text{ m/s}$ geringfügig stärker ist als im Fall des schwächer geneigten Hanges ($u_{min} \approx -1,7 \text{ m/s}$). Diese Ähnlichkeit ist in Übereinstimmung mit den Bodendruckverteilungen im Lee, die in Abb. 35.1 und 2 dort fast identisch sind. Entlang des Bergprofils treten erwartungsgemäß die größten Unterschiede in der Bodendruckverteilung auf. Vor dem steileren Luvhang wird mit $0,22 \text{ mb}$ ein höheres Druckmaximum erreicht als über dem flachen Hang ($0,18 \text{ mb}$ in Abb. 35.1). Zu diesem erhöhten Überdruck trägt die Hangaufsteilung

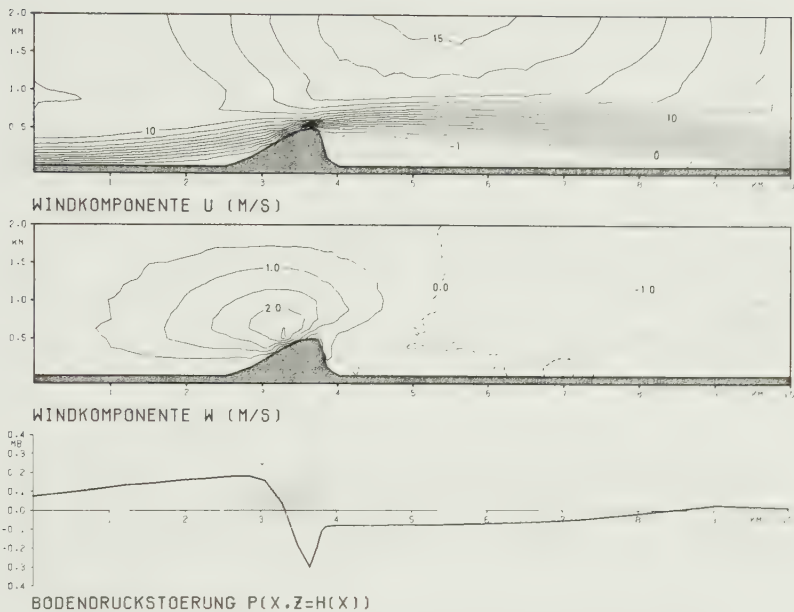


Abb. 35.1: Überströmung eines leeseitig aufgestellten Berges mit $|v_{h,g}| = 10 \text{ m/sec}$ und $\gamma_g = 0.65 \text{ K/100m}$

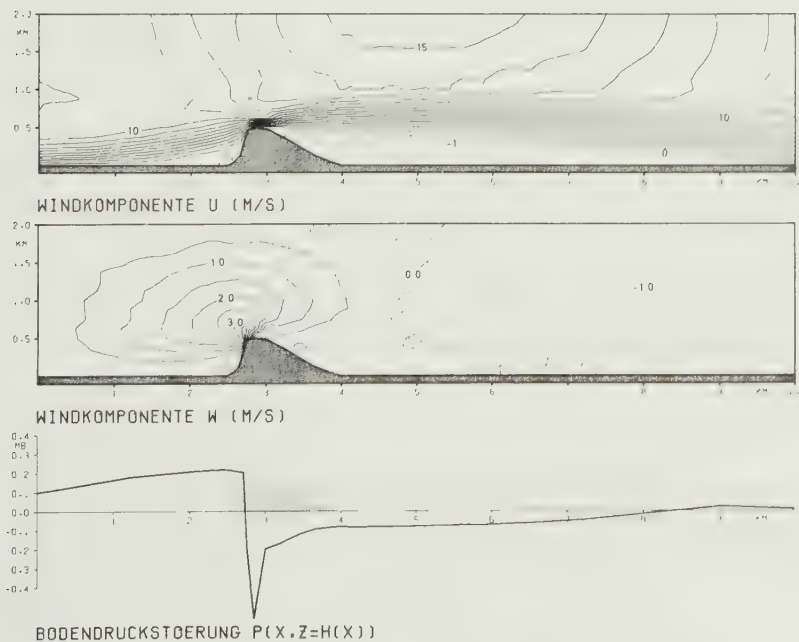


Abb. 35.2: Überströmung eines luvseitig aufgestellten Berges mit $|v_{h,g}| = 10 \text{ m/sec}$ und $\gamma_g = 0.65 \text{ K/100m}$

sowohl über den dynamischen als auch den hydrostatischen Stördruckanteil bei. Dynamisch wird die Druckerhöhung durch den verstärkten Stau begünstigt, hydrostatisch wirkt sich die geringfügig höhere Hebungsabkühlung über dem steileren Luvhang in gleicher Richtung aus.

Der Fall mit fast senkrechter Luvhangneigung enthüllt, daß der aus der ungestörten Anströmung abzuschätzende Staudruck zwar die richtige Größenordnung für das Bodendruckmaximum auf dem angeströmten Hang liefert, sich aber für eine quantitative Vorhersage des Druckmaximums in Abhängigkeit von der Anströmstärke nicht eignet. Der Anströmung $w_h(0, z)$ läßt sich ein über die Gipfelhöhe h_g gemittelter Stau-

druck zuordnen gemäß $\bar{p}_s = \frac{\rho_0}{2 h_g} \int_0^{h_g} u^2(0, z) dz$. Mit einer Summenabschätzung erhält man aus dem $u(0, z)$ -Profil in Abb. 10 für $\gamma_g = 0.65 \text{ K/100 m}$:

$$\bar{p}_s \approx \frac{\rho_0}{2 h_g} \sum_{i=1}^5 u^2(0, (i - \frac{1}{2}) \delta z) \approx 0,32 \text{ mb.}$$

Obwohl die hydrostatische

Druckerhöhung noch hinzukommt, erreicht das Druckmaximum am fast senkrechten Luvhang nach Abb. 35.2 nur etwa 70 % dieses Wertes. Der dynamisch bedingte Unterdruck am Gipfel des luvseitig aufgeteilten Berges erreicht mit -0,57 mb einen deutlich größeren Betrag als über dem Berg mit flacherem Luvhang (-0,31 mb). Die dadurch hervorbrachte größere gegenläufige Druckbeschleunigung in Bodennähe unmittelbar stromabwärts vom Gipfel erklärt die etwas stärkere Rückströmung im Lee des Berges mit steilerem Luvhang.

Abb. 35.1 weist im Anströmbereich noch keine Stagnation aus, während vor dem Steilhang bereits Ablösung mit einer bis fast zur halben Gipfelhöhe reichenden Blockierung entstanden ist. Die maximale bodennahe Gegenströmung beträgt -0,2 m/s. Bei stärkerer Schichtungsstabilität ($\gamma_g = 0.20 \text{ K/100 m}$) erreicht die Blockierung (mit mehr als 400 m) dann schon fast die Gipfelhöhe. Trotz der Blockierung hat die Vertikalgeschwindigkeit für $\gamma_g = 0.65 \text{ K/100 m}$ über dem oberen Steilhangbereich mit über 4 m/s immer noch ein höheres Maximum als in der blockierungsfreien Überströmung des flacheren Hanges ($w_{\text{max}} \approx 2,7 \text{ m/s}$). Außerhalb der unmittelbaren Gipfelumgebung sind die Vertikalgeschwindigkeitsfelder bei steilem Luv- bzw. Leehang jedoch sehr ähnlich. Hieran wird wiederum die blockierungsbedingte virtuelle Veränderung des Topographieprofils im Sinne einer Hangabflachung deutlich.

An dieser Stelle ist eine Anmerkung zu den noch in jüngster Zeit von ATKINSON [2] vorbehaltlos referierten Ergebnissen WALLINGTONS [72] bezüglich des Einflusses der Topographieform auf Leewellen angebracht. WALLINGTON fand unter den Voraussetzungen der linearen Wellentheorie eine Abhängigkeit sowohl der Wellenamplitude als auch insbesondere der Phase von den Neigungen asymmetrischer Bergprofile. Die durchweg für sehr große Hangneigungen durchgeführten Simulationen im Rahmen der vorliegenden Arbeit lassen vermuten, daß die Gültigkeit dieser Befunde auf Topographien mit geringen Hangneigungen beschränkt ist. Alle Experimente zeigten nämlich eine nur schwache Abhängigkeit der Wellenamplitude vom Ausmaß der Profilasymmetrie bzw. der Hangsteilheit. Die Wellenphase war in allen Fällen sogar praktisch identisch mit derjenigen bezüglich des symmetrischen Profils. Die Erklärung ist einfach: Für die äußere Strömung und ins-

besondere die Leewellen ist nicht das *tatsächliche*, sondern das durch die luv- und leeseitige Ablösung erzeugte virtuelle Bergprofil maßgeblich. Alle Experimente mit den hier zugrundegelegten großen Hangneigungen zeigten aber: für die zur Wellenbildung hinreichenden Parameterkombinationen $|w_{h,g}|$, γ_g sind die luvseitige Blockierung und die Ablösung im Lee so weit entwickelt, daß die Lage der Ablöselinien kaum noch von der tatsächlichen Hangform abhängt.

NUMERISCHE EXPERIMENTE ZUR FREIEN KONVEKTION

Das Hauptgewicht bei der Anwendung des hier präsentierten nichtlinearen Finite-Elemente-Modells lag auf der Simulation *erzwungener* Konvektion über steiler Topographie. Die numerische Simulation *freier* Konvektion wurde im wesentlichen unternommen, weil sich hier eine Vergleichsmöglichkeit mit Meßresultaten aus Thermikbefliegungen ergab. Im folgenden werden exemplarisch einige Ergebnisse der Simulationen zur freien und gemischten Konvektion dargestellt.

Die stationären Wärmequellen auf dem Rand wurden hierbei in einfachster Form vorgegeben, nämlich in Gestalt der Temperaturverteilungen $\vartheta(x, h(x)) = f(x)$ auf den Hängen $z = h(x)$. Das ist auch in einem stationären Modell nur ein unbefriedigender Ersatz für die mit Hilfe einer Strahlungsbilanz und einer verbesserten Beschreibung der bodennahen laminaren und turbulenten Wärmetransporte zu berechnenden Wärmeübergänge vom Erdboden in die Atmosphäre. Aus diesem Grunde sollen die hier gezeigten Ergebnisse nicht überbewertet werden. Unabhängig von diesem Vorbehalt bleibt jedoch die Vergleichsmöglichkeit zwischen den in einiger Entfernung vom Erdboden meßtechnisch erfaßten bzw. modellmäßig berechneten Korrelationen von Temperaturstörungen und Konvektionsgeschwindigkeiten. Darüberhinaus erhalten die Simulationen Eigengewicht dadurch, daß sie Abschätzungen ermöglichen, zu welchen Anteilen die Auftriebs-, Trägheits- und Druckbeschleunigungen an der Ausbildung thermischer Konvektion über einem Hang beteiligt sind.

Abb. 36.1 zeigt die Konvektion im Gefolge einer Erwärmung des rechten Hanges um 2 K. Der Verlauf der vorgegebenen $\vartheta(x, h(x))$ -Verteilung ist unter der Abb. 36.1 a) eingetragen. Der ungestörte Referenzzustand ist im Gebiet $h(x) \leq z \leq 1500$ m neutral, darüber stabil geschichtet mit $\gamma_g = 0,65$ K/100 m. Damit ist zumindest qualitativ die Standardsituation einer nach oben hin durch eine stabile Schicht (oft eine Inversion) begrenzten Konvektion realisiert.

Innerhalb der neutralen Schicht ist die für freie Konvektion charakteristische Korrelation positiver Vertikalgeschwindigkeiten mit positiven Temperaturstörungen zu erkennen. Die größte Vertikalgeschwindigkeit von 3,6 m/s wird in knapp 1400 m Höhe erreicht, also im oberen Bereich des Auftriebsbeschleunigungsfeldes. Die starke hangparallele Isothermendrängung über dem erwärmten Gebiet zeigt eine rasche Abnahme der Temperaturstörung in hangnormaler Richtung an. In Gipfelhöhe liegt die Temperaturabweichung über dem zentralen Hangbereich nur noch bei etwa +0,6 K. Innerhalb des Thermikschlauches in doppelter Gipfelhöhe sind dann Vertikalgeschwindigkeiten von etwa 3 m/s mit Temperaturstörungen zwischen 0,2 und 0,5 K korreliert. Das ist

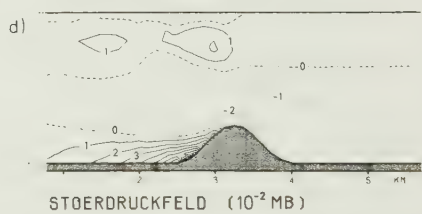
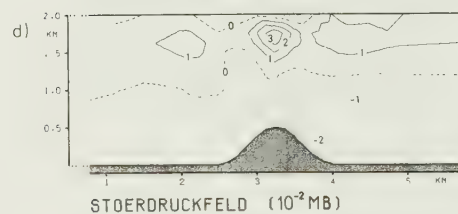
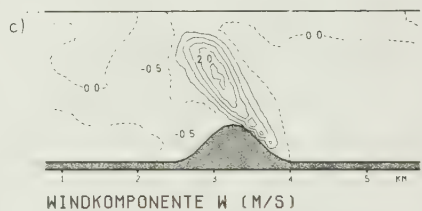
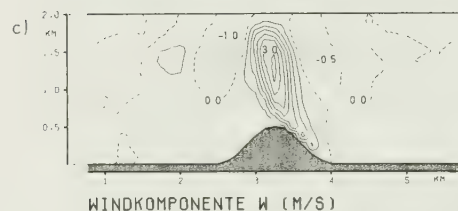
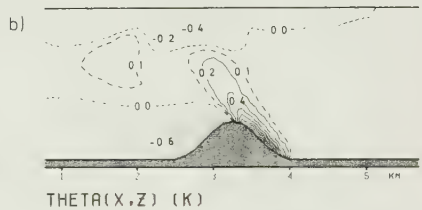
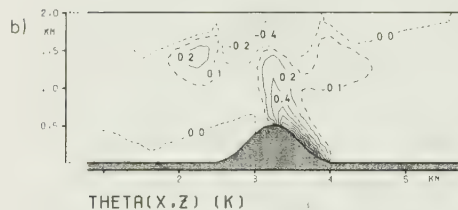
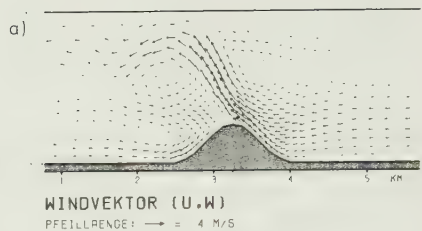
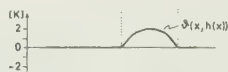
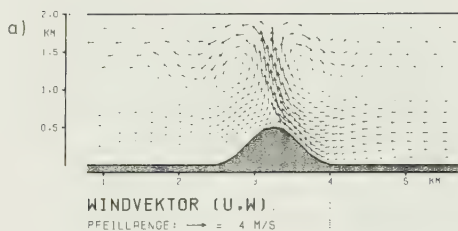


Abb. 36.1 :

Konvektion über warmem Hang (+ 2 K)
 $h(x) \leq z \leq 1500 \text{ m}$: Neutrale Schichtung
 $1500 \text{ m} \leq z \leq H$: $\gamma_g = 0.65 \text{ K}/100 \text{ m}$

Abb. 36.2 :

Konvektion über kaltem (- 2 K) und
 warmem (+ 2 K) Hang
 Schichtung im Referenzzustand wie
 in Abb. 36.1

in guter Übereinstimmung mit den Korrelationen, die von FORTAK [21] aus simultanen Registrierungen der Temperatur und Vertikalgeschwindigkeit während der Befliegung quasistationärer Konvektionszellen ermittelt wurden. Auch die rasche Dämpfung der Steigbewegung und die Umkehr der Korrelation von ϑ und w beim Eindringen der Konvektion in die stabile Oberschicht wird durch diese Messungen bestätigt: knapp oberhalb der neutralen Schicht ist der Wärmeüberschuß bereits aufgezehrt und mit weiterem trägheitsbedingten Eindringen der Konvektion in die stabile Schicht sind dann positive Vertikalgeschwindigkeiten verbunden mit negativen Temperaturstörungen. Das schließlich erreichte Wärmedefizit gibt Anlaß zu einer Absinkbewegung in der Umgebung des oberen Aufwindgebietes. Zu beiden Seiten wird ein maximales Sinken mit $w \approx -1,0 \text{ m/s}$ erreicht. In dem stärkeren linksseitigen Sinkgebiet werden an der Untergrenze der stabilen Schicht mit $\vartheta \approx +0,2 \text{ K}$ noch einmal geringfügig höhere Temperaturen erreicht als im gleichen Niveau innerhalb der Konvektionszelle ($\vartheta \approx 0,1 \text{ K}$). Dies dürfte sich aus der Verminderung des lokalen Wärmedefizits der in die stabile Schicht eindringenden Luft infolge der turbulenten Wärmediffusion erklären.

Die hangparallele Aufwindkomponente erreicht ein Maximum von etwa $2,5 \text{ m/s}$ in knapp 100 m Höhe über dem erwärmten Hang. Über dem thermisch neutralen Hang hat sich als Folge der von der Hangthermik induzierten Kompensationsströmung ein schwacher Hangaufwind von maximal $0,6 \text{ m/s}$ ausgebildet.

CORIOLIS-Effekte erwiesen sich für freie Konvektion in diesem Scale erwartungsgemäß als völlig bedeutungslos. Selbst wenn eine kompensatorische Horizontalbewegung über die halbe Integrationsgebietslänge $L/2$ berücksichtigt wird, kann die von der *CORIOLIS*-Beschleunigung produzierte laterale Windkomponente höchstens von der Größenordnung $fL/2 \approx 0,5 \text{ m/s}$ sein. Tatsächlich liegen die berechneten Beträge $|v|$ im Mittel bei etwa $0,1 \text{ m/s}$ mit Maximalwerten zwischen $0,3$ und $0,4 \text{ m/s}$. Auf die Druckverteilungen wird weiter unten ausführlicher eingegangen.

Abb. 36.2 zeigt das Ergebnis einer Simulation, bei der der rechte Hang ebenso wie im Fall der Abb. 36.1 erwärmt ist, zusätzlich jedoch eine betragsmäßig dazu symmetrische Bodenunterkühlung vorgegeben ist. Dadurch wird über dem linken Hang ein katabatischer Wind induziert. Da die abwärts gerichtete Konvektion durch die nahe untere Berandung begrenzt ist, bleiben die maximalen Beträge der katabatischen Hangströmung mit knapp 2 m/s deutlich unterhalb der Vertikalgeschwindigkeitsbeträge im thermischen Steiggebiet. Der Vergleich der Abbildungen 36.1 und 2 zeigt, daß die Verhältnisse über benachbarten Hängen nicht unabhängig voneinander betrachtet werden können. Die beiderseitigen Hangwindssysteme schwächen sich gegenseitig. So hat sich das maximale Steigen über dem warmen Hang von $3,6 \text{ m/s}$ auf $3,0 \text{ m/s}$ vermindert. Auch die räumliche Lage des Thermikschlauches wird durch das katabatische Windsystem beeinflusst. Während sich bei thermisch neutralem linken Hang die Konvektionszelle oberhalb des Gipfels fast senkrecht aufstellt, behält sie über dem kalten Hang die Richtung des Hangaufwindes und mündet in eine kräftige geschlossene Zirkulation ein.

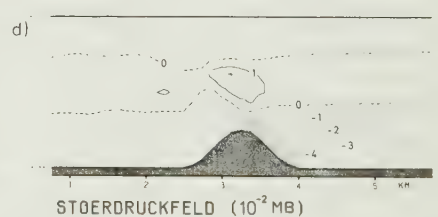
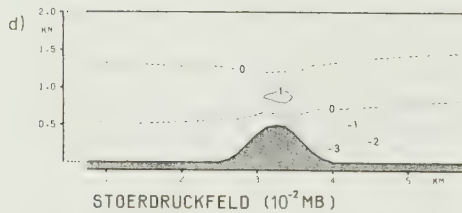
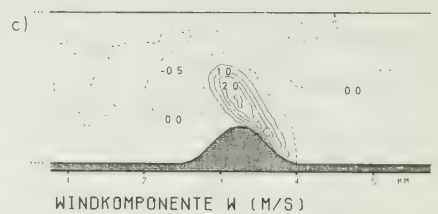
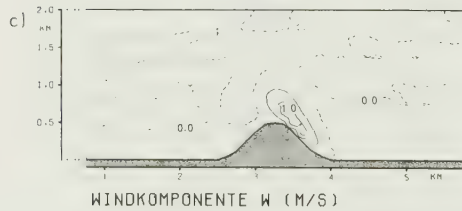
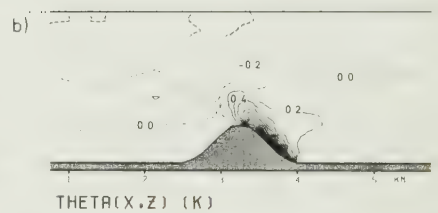
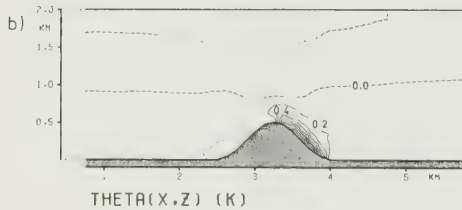
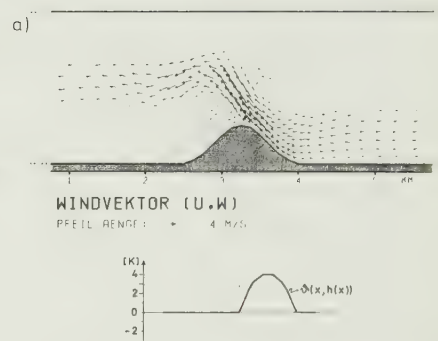
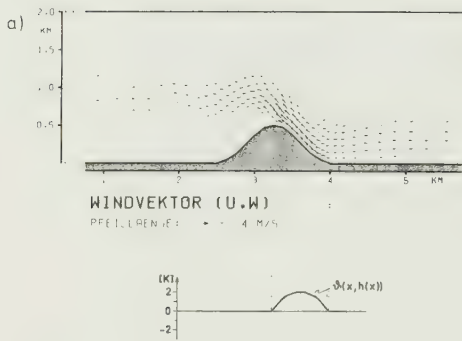


Abb. 37.1 :

Konvektion über erwärmtem Hang (+2 K)
bei schwach stabiler Schichtung mit
 $\gamma_g = 0.80 \text{ K/100m}$

Abb. 37.2 :

Wie Abb. 37.1, jedoch mit einer
Hangewärmung um 4 K

In den Abbildungen 37.1 und 37.2 ist die simulierte Konvektion über dem auf 2 K bzw. 4 K Übertemperatur erwärmten Hang bei durchgehend schwach stabiler Schichtung des Referenzzustandes mit $\gamma_g = 0.80 \text{ K}/100 \text{ m}$ gegenübergestellt. Abgesehen von der geringeren Vertikalerstreckung zeigt der Vergleich mit Abb. 36.1, daß die Konvektion im Gegensatz zum ungedämpften Fall (neutrale Schichtung) auf einen bezüglich der Hangnormalen schmalere Bereich beschränkt bleibt.

Für die Bodenerwärmung um 2 K wird ein maximales Steigen von nur 1,4 m/s erreicht und selbst für $\Phi_{\text{MAX}}(x, h(x)) = 4 \text{ K}$ bleibt das Maximum mit 2,7 m/s noch deutlich unter den Vertikalgeschwindigkeiten in neutraler Schichtung bei 2 K Übertemperatur am Boden. Das Trägheitsbedingte Überschießen produziert nur sehr kleine Temperaturdefizite von -0,2 bzw. -0,3 K. Entsprechend klein bleiben die Absinkbewegungen zu beiden Seiten des Aufwindbereichs ($w_{\text{MIN}} \approx -0,2$ bzw. -0,7 m/s links und -0,1 bzw. -0,2 m/s rechts vom Gipfel). Über dem thermisch neutralen Hang wird jetzt selbst für die höhere Bodentemperatur kein nennenswerter Aufwind induziert. Die bodennahe horizontale Ausgleichsströmung bleibt auf den Bereich vor dem erwärmten Hang beschränkt.

Aufschlußreich sind die Druckverteilungen in den Abbildungen 36 und 37. Quantitativ ist festzustellen, daß die bei thermischer Konvektion auftretenden Druckstörungen im Größenordnungsbereich $10^{-2} - 10^{-1} \text{ mb}$ liegen und damit um eine Größenordnung kleiner sind als die dynamischen Druckstörungen bei erzwungener Konvektion mit $|\mathbf{v}_{h,g}| = 10 \text{ m/s}$. Trotzdem erreichen aber die Druckgradienten und damit die Druckbeschleunigungen lokal Beträge von derselben Größenordnung wie im Fall der Bergüberströmung. Qualitativ zeigt sich insbesondere in unmittelbarer Hangumgebung eine auffallende Korrelation der Druckverteilungen und Temperaturfelder bzw. der Bodendruckverteilung und der vertikal gemittelten Temperaturstörung. Daß insgesamt trotzdem die hydrostatische Druckstörung keineswegs größenordnungsmäßig dominiert, zeigt eine Abschätzung für die dynamischen Stördruckanteile. Ähnlich wie auf S 110 findet man z.B. anhand der Abb. 36.1 für die durch Zentrifugalbeschleunigungen über dem erwärmten Hang induzierte Druckerhöhung einen Wert zwischen 0,01 und 0,02 mb. Noch größer ist der dynamische Beitrag zum Druckmaximum im Bereich der in die stabile Schicht eingedrungenen Konvektion. Allein für den tangentialbeschleunigungsbedingten Anteil unterhalb der Konvektionsverzweigung ergibt sich etwa $\frac{\rho}{2} 8(w^2) \approx 0,02$ bis 0,03 mb. Bei der gedämpften Konvektion (Abb. 37.1 und 2) sind die hangnormalen großen Unterdrucke bis -0,1 mb jedoch fast ausschließlich thermisch bedingt. Für die Hangenerwärmung um 4 K lassen sich aus Abb. 37.2 d sehr große hangwärts gerichtete Druckbeschleunigungen von über 5 cm/s^2 ablesen.

Diese Befunde lassen den PRANDTL'schen eindimensionalen Ansatz zur Behandlung des Hangaufwindes fragwürdig erscheinen. PRANDTL [54] postuliert in Analogie zum klassischen Problem der senkrechten beheizten Wand eine Gleichgewichtsströmung bezüglich der hangparallelen Auftriebs- und Reibungskraftkomponenten. Unbefriedigend ist hierbei schon, daß eine hangparallele Strömung bereits vorausgesetzt, ihr Zustandekommen aber nicht begründet wird. Bedenklicher erscheint aber die quantitativ nicht begründete Vernachlässigung der Druckkräfte, die nach den vorliegenden Ergebnissen zumindest lokal mit dem Auftrieb vergleichbare Beträge erreichen. Die oben festgestellte

Größenordnung der Druckstörungen und der von ihnen hervorgebrachten Beschleunigungen zeigt eine hohe Übereinstimmung mit den von EGGER [15] berechneten Druckfeldern. Er behandelt das Problem der Zirkulation über einem lokal übertemperierten Hang zweidimensional mit Berücksichtigung des thermischen Stördruckfeldes, jedoch unter Vernachlässigung aller nichtlinearen konvektiven Transporte. Zwar werden die dortigen Rechnungen für einen insgesamt wesentlich längeren Hang durchgeführt, jedoch entsprechen sowohl die Ausdehnung des erwärmten Hangbereichs als auch die Erwärmung um 4 K fast genau den der Abb. 37.2 zugrundeliegenden Voraussetzungen. Die Verhältnisse in unmittelbarer Umgebung des Hanges sollten daher vergleichbar sein. Tatsächlich erhält EGGER maximale Stördruckbeträge von 0,08 bis 0,1 mb und aus den dargestellten Druckverteilungen sind sowohl hangnormale als auch hangparallele Druckbeschleunigungen bis zu 5 cm/s^2 abzulesen (vgl. oben Abb. 37.2 d !). Damit werden aber in Übereinstimmung mit den hier vorliegenden Ergebnissen die Druckbeschleunigungen ebenso groß wie die hangparallele Komponente der Auftriebsbeschleunigung; denn diese erreicht in dem schmalen hangparallelen Bereich mit $1 \text{ K} \leq \vartheta \leq 4 \text{ K}$ für den um 45° geneigten Hang Werte zwischen 2 und 10 cm/s^2 . Der Vergleich der linear modellierten Wind- und Temperaturverteilungen mit den von ORVILLE [48] als Ergebnisse numerischer Simulationen mit einem zweidimensionalen nichtlinearen Modell erhaltenen läßt die Frage offen, ob konvektive Trägheitsbeschleunigungen und Advektionen des Temperaturstörungsfeldes für die Behandlung des Hangwindes vernachlässigbar sind. Dagegen erscheint es unter Einbeziehung der Ergebnisse der vorliegenden Arbeit zweifelsfrei, daß sowohl die hangnormalen als auch die hangparallelen thermisch induzierten Druckbeschleunigungen berücksichtigt werden müssen.

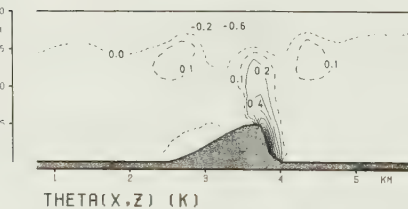
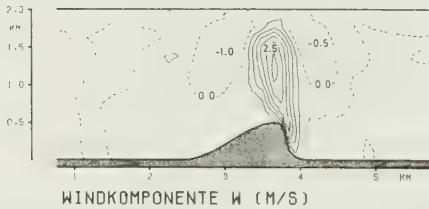


Abb. 38.1 :

Konvektion über einem um 2 K erwärmten Steilhang

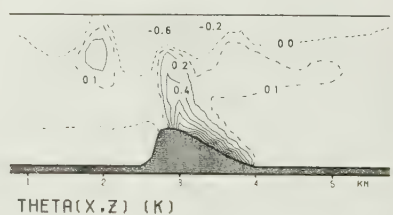
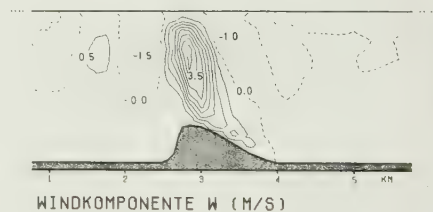


Abb. 38.2 :

Konvektion über einem um 2 K erwärmten flachen Hang

Abb. 38 demonstriert den unmittelbaren Einfluß der Steilheit des erwärmten Hanges auf die thermische Konvektion. Die Bedingungen entsprechen denen der Abb. 36.1, d.h. Hangerwärmung um 2 K und neutrale Schichtung im Referenzzustand bis $z = 1500$ m mit darüberliegender stabiler Schicht ($\gamma_g = 0.65$ K/100 m). Quantitativ sind die beiden Fälle wegen der unterschiedlichen Länge der beheizten Hänge nicht vergleichbar. Dementsprechend wird bei erwärmtem flachen Hang mit 4,4 m/s ein wesentlich stärkeres Steigen oberhalb der Gipfelhöhe erreicht als im Fall des beheizten Steilhanges ($w_{\max} \approx 3,2$ m/s). Bemerkenswert ist aber die weitgehende Bestätigung einer Folgerung aus dem sehr einfachen eindimensionalen PRANDTLschen Hangwindmodell: die maximale hangparallele Geschwindigkeit ist fast unabhängig vom Neigungswinkel.

Qualitativ aufschlußreich ist jedoch der Einfluß der bodennahen hangwärts gerichteten Druckbeschleunigungen, der Trägheit und des konvektiven Wärmetransportes: über dem flachen Hang stellt sich der Thermikschlauch erst oberhalb des Gipfels deutlich auf. Dadurch ist das maximale Steigen um die halbe Hanglänge gegenüber dem Zentrum der Bodenerwärmung versetzt und liegt über dem Kamm.

Abschließend sei noch exemplarisch ein Ergebnis der Simulationen zur gemischten Konvektion gezeigt. Das Beispiel stammt aus einer Experimentreihe, die der Frage galt, wie sich warme bzw. kalte Hänge auf die Überströmung im Vergleich zum thermisch neutralen Berg auswirken. Die vorangegangenen Betrachtungen über die Größenordnungen der verschiedenen Stördruckanteile lassen vermuten, daß bei hinreichend großen Anströmgeschwindigkeiten selbst stärkere Temperaturinhomogenitäten auf den Hängen nur einen modifizierenden Einfluß auf die erzwungene Konvektion haben. Das hat sich für dynamische Antriebsstärken mit $|v_{h,g}| \geq 10$ m/s bestätigt.

Abb. 39.1 zeigt die $u(x,z)$ -, $w(x,z)$ - und $p(x,z)$ -Verteilungen für die Überströmung mit $|v_{h,g}| = 10$ m/s bei stabiler Schichtung im Referenzzustand ($\gamma_g = 0.65$ K/100 m). Abb. 39.2 zeigt den entsprechenden Fall, wobei jetzt aber der Leehang um maximal 4 K unterkühlt ist. Der Vergleich zeigt, daß sich unmittelbar über dem kalten Hang die katabatische Beschleunigung gegen den dynamisch bedingten Leewirbel durchgesetzt hat. Anstelle des Hangaufwindes von etwa 0,7 m/s bei thermisch neutralem Leehang zeigt Abb. 39.2 einen Hangabwind von etwa gleicher Stärke. Die thermisch bedingte Erhöhung des Bodendruckniveaus hat das leeseitige Druckgefälle zum Hang hin reduziert bzw. unmittelbar im Lee völlig kompensiert. Als Folge davon haben sich die Ausdehnung des Ablösegebietes und die Stärke der bodennahen Gegenströmung (von 2,1 auf weniger als 1 m/s) verringert.

Weniger auffällig sind die Unterschiede im Strömungsbereich oberhalb der abgehobenen Grenzschicht. Das Geschwindigkeitsmaximum in der Höhe hat sich um etwas mehr als 1 m/s abgeschwächt und weiter stromaufwärts verlagert. In der Nachlaufströmung hinter dem kälteren "Totwassergebiet" hat sich das maximale Sinken von 1,7 m/s auf 1,1 m/s verringert. Vor und über dem Luvhang bleiben die Verhältnisse praktisch unbeeinflusst von der leeseitigen Abkühlung.

Abb. 39.2 bestätigt noch einmal den oben schon hervorgehobenen Größenordnungsunterschied zwischen hydrostatischen und dynamischen Druckstörungen bei gemischter Konvektion. Der tangentialbeschleunig-

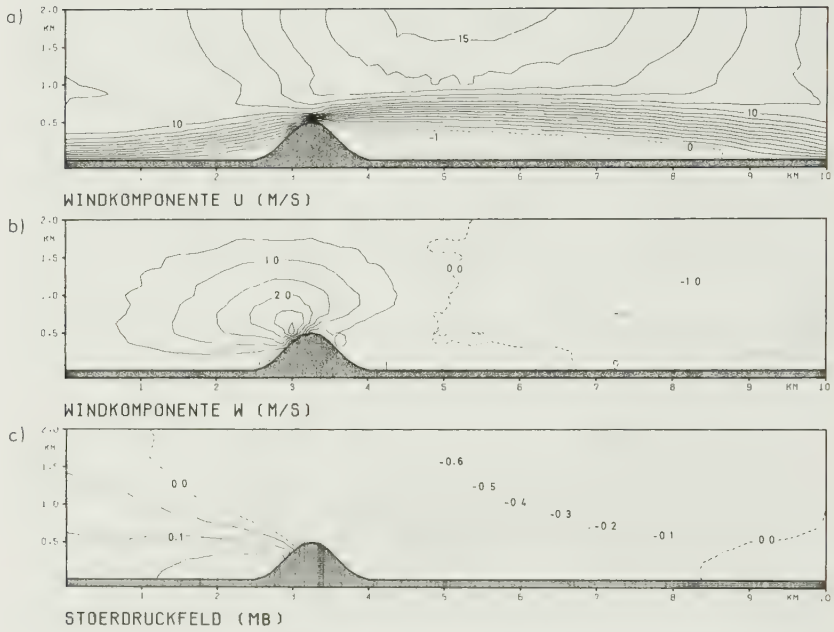


Abb. 39.1: Überströmung mit $|v_{h,g}| = 10 \text{ m/sec}$ und $\gamma_g = 0.65 \text{ K/100 m}$ bei thermisch neutralem Berg

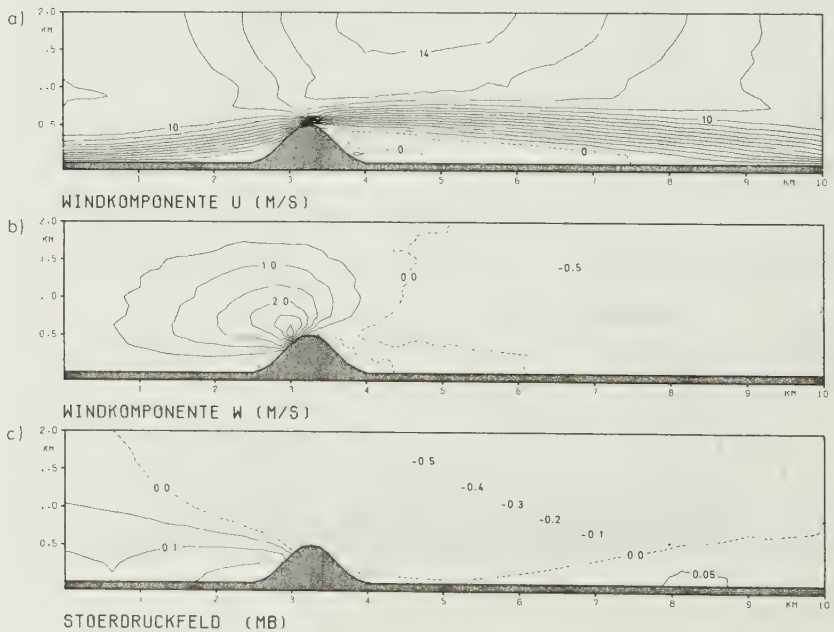


Abb. 39.2: Überströmung mit $|v_{h,g}| = 10 \text{ m/sec}$ und $\gamma_g = 0.65 \text{ K/100 m}$ bei kaltem Leehang (-4 K)

gungsbedingte Unterdruck im Niveau $z = H$ erreicht mit $-0,55$ mb etwa den zehnfachen Betrag der hydrostatischen Bodendruckanhebung über dem kalten Hang. Übereinstimmend weisen die u - und p -Felder der Abbildungen 39.1 und 2 aus, in welcher guten Näherung die Strömung am oberen Rand der *BERNOULLI*schen Energiegleichung für konstantes Potential genügt ($z = H$ ist wegen der Randbedingung $w(x, H) = 0$ und der fast verschwindenden v -Komponente praktisch eine Stromlinie). Für den maximalen Unterdruck folgt mit Rücksicht auf $p(0, H) \approx 0$ aus dieser Gleichung

$$p_{\min} \approx \frac{1}{2} \rho_0 (u^2(0, H) - u_{\max}^2(H)) .$$

Beispielsweise ist für den Fall der Abb. 39.2 $u_{\max} \approx 14,6$ m/s. Mit $u(0, H) = 10$ m/s resultiert daraus $p_{\min} \approx -0,56$ mb und das stimmt genau mit dem berechneten Minimum der Druckverteilung in Abb. 39.2 c überein.

5.3 DIE EXPERIMENTE MIT DER TALTOPOGRAPHIE

Die Anwendung des in der vorliegenden Arbeit präsentierten Finite-Elemente-Simulationsmodells galt schwerpunktmäßig den Besonderheiten der erzwungenen Konvektion über steiler Topographie. In diesem Zusammenhang sind die meisten der mit der Taltopographie als unterer Gebietsberandung (vgl. Abb. 13 b) durchgeführten numerischen Experimente von geringerer Bedeutung. Da sich der Gleichgewichtsströmung hier kinematisch kein Hindernis entgegenstellt, spielen die nichtlinearen Trägheitsbeschleunigungen eine wesentlich geringere Rolle als im Fall der Bergüberströmung. Als Folge davon sind die dynamischen Druckstörungen sehr viel kleiner (s. S. 110). Vergleichbare Wirbelerscheinungen wie in der Umgebung der steilen Berghänge, wo Trägheits- und dynamische Druckbeschleunigungen dominierten, sind daher von vornherein nicht zu erwarten. Somit verliert der Begriff der erzwungenen Konvektion unabhängig von der Hangneigung bei der Talüberströmung weitgehend seine Bedeutung.

Die Ergebnisdiskussion der Talexperimente wird deshalb auf diejenigen Fälle beschränkt, in denen ein nennenswerter Einfluß der Hangsteilheit sowohl auf die Überströmung als auch auf das induzierte Windsystem im Talbereich zu erkennen ist.

Alle Experimente zur Talüberströmung mit verschiedener Antriebsstärke und bei unterschiedlicher Schichtungsstabilität bestätigen das von SCORER [61] als charakteristisch ausgewiesene Strömungsbild in der x - z -Ebene: Die Strömung löst sich fast unmittelbar hinter der Oberkante des Leehanges ab und legt am Luvhang in einer von der Schichtung abhängigen niedrigeren Höhe wieder an. Unterhalb der abgelösten Grenzschicht füllt ein schwacher Wirbel den gesamten Talbereich aus. Die bodennahe Gegenströmung erreicht für $|\mathbf{v}_{0,g}| = 10$ m/s selbst bei neutraler Schichtung nur Beträge bis 0,8 m/s, die sich bereits bei mittlerer Stabilität mit $\gamma_g = 0,65$ K/100 m auf weniger als 0,4 m/s reduzieren.

In Abb. 40 sind die Felder der drei Windkomponenten u , v und w für die Überströmung mit $|\mathbf{v}_{0,g}| = 10$ m/s bei thermisch neutraler (Abb. 40.1) bzw. isothermer Schichtung (Abb. 40.2) gegenübergestellt.

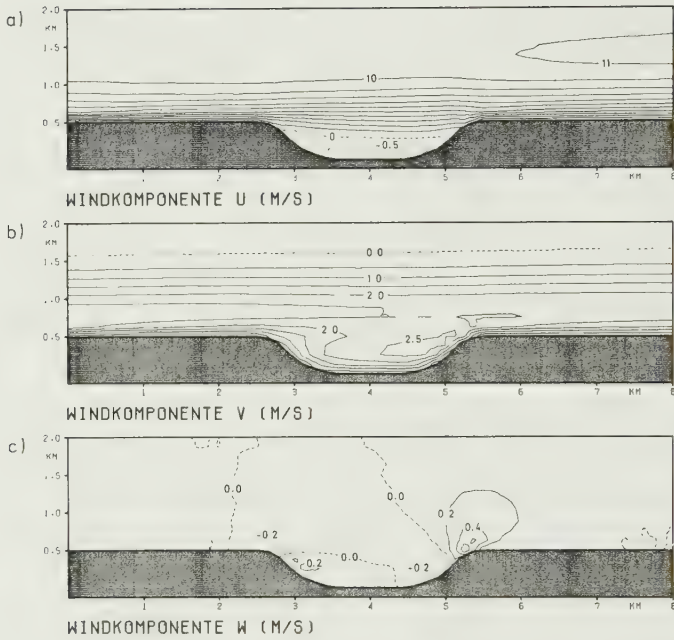


Abb. 40.1: Talüberströmung mit $|v_{h,g}| = 10 \text{ m/sec}$ bei neutraler Schichtung

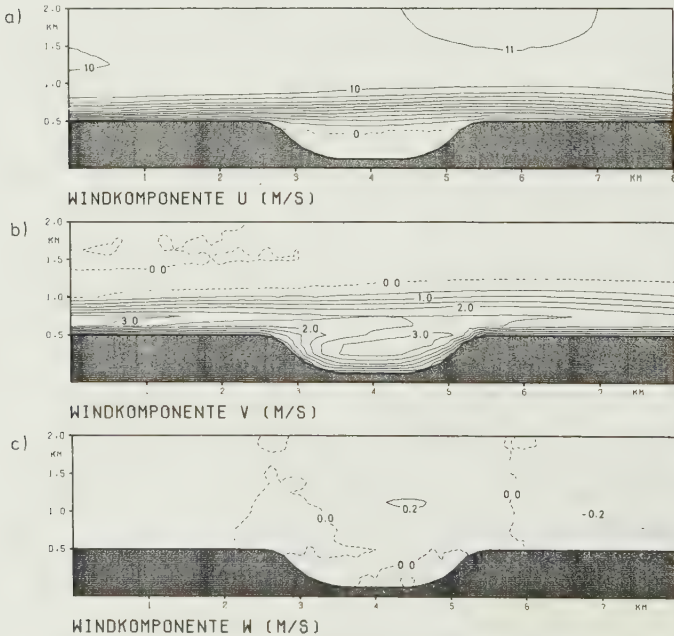


Abb. 40.2: Talüberströmung mit $|v_{h,g}| = 10 \text{ m/sec}$ bei isothermer Schichtung

Interessant ist die Talüberströmung bei neutraler Schichtung insofern, als sie in fast reiner Form die hydrodynamische Idealisierung der turbulenten Strahlungsgrenze repräsentiert. Die Bedingungen der freien Turbulenz sind in weit höherem Maß erfüllt als in der freien Durchmischungsschicht hinter dem Berg. Dort nämlich traten sehr große dynamisch bedingte Druckunterschiede parallel zur Ablöselinie auf. Im Gegensatz dazu sind die Druckunterschiede entlang der Durchmischungsschicht zwischen der Strömung oberhalb der Hochebene und der fast ruhenden Luft im Tal sehr klein: Die horizontalen Druckgradienten bleiben betragsmäßig mit 10^{-5} mb/m (nur lokal an der Oberkante des Leehanges bis 10^{-4} mb/m) um eine Größenordnung kleiner als die entsprechenden Druckgradienten stromabwärts vom Ablösepunkt am Berghang. Entsprechend klein sind die Druckbeschleunigungen in x-Richtung mit etwa 10^{-3} m/s², so daß eine wesentliche Voraussetzung des klassischen Strahlungsgrenzen- bzw. Freistrahlmmodells erfüllt ist: der über einem Kontrollschnitt $x = \text{const}$ gemittelte Impuls bleibt entlang der Achse der Durchmischungsschicht konstant. Damit können die Impulsverluste der Überströmung bzw. die Impulsgewinne der Luft im oberen Talbereich nur über die turbulenten Schubspannungen erklärt werden.

Es muß darauf hingewiesen werden, daß der hier verwendete Mischungswegansatz $K_M = l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|$ in der Theorie der freien Turbulenz nicht favorisiert wird. Für den Bereich der freien Durchmischungsschicht sind verschiedene Ansätze für den turbulenten Impulsaustausch begründet worden. Von diesen hat der einfachste, nämlich der ebenfalls von PRANDTL [53] stammende Ansatz $K_M \sim \delta (u_{\text{MAX}} - u_{\text{MIN}})$ (δ : Breite der Durchmischungsschicht, $u_{\text{MAX}} - u_{\text{MIN}}$ hier: $\approx u_g$) zu denjenigen Resultaten geführt, die am besten mit den experimentellen Ergebnissen übereinstimmen (s. hierzu z.B. SCHLICHTING [58], dort weitere Literatur). Zumindest qualitativ bleiben aber die theoretischen Befunde anwendbar auf die hier gewonnenen Ergebnisse.

In der Theorie der freien Turbulenz erweist sich der über den Durchmischungsbereich integrierte Fluß $\int_{h_0-\delta}^{h_0} u dz$ als proportional der Entfernung vom Ursprung der Strahlungsgrenze (hier: der oberen Leehangkante). Ein entsprechender vertikaler Kompensationsstrom fließt in Richtung der sich stromabwärts verbreiternden Turbulenzschicht (s. Abb. 41).



Abb. 41: Zur freien Durchmischung

Die dadurch induzierte Ausgleichsbewegung in Talbodennähe überlagert sich gleichsinnig der bodennahen Rückströmung, die durch den schwachen

gegenläufigen Druckgradienten erzeugt wird. Trotzdem erreicht der Wirbel nicht annähernd die Stärke des von den großen Druckbeschleunigungen ($> 10^{-2} \text{ m/s}^2$) im Lee des Berges verursachten Rotors (für die gleichen Bedingungen $u_g = 10 \text{ m/s}$, $\gamma_g = 0.98 \text{ K/100m}$ erreichte die maximale Rückströmung dort mit $u = -2,1 \text{ m/s}$ etwa den dreifachen Wert des "Gegenwindes" im Tal).

Als Folge der bei neutraler Schichtung über dem Tal absinkenden Turbulenzschicht legt die Strömung am Luvhang deutlich unterhalb des gegenüberliegenden Ablösepunktes wieder am Boden an. Dadurch entsteht ein kinematisch erzwungenes Aufwindgebiet unmittelbar über der Oberkante des Luvhanges mit maximalem Steigen von $w = 0,9 \text{ m/s}$. Mit zunehmender Schichtungsstabilität vermindert sich das stromabwärts tiefergreifende "Mitreißen" der Talluft und bei isothermer Schichtung (Abb. 40.2) setzt sich die Überströmung überhaupt nicht mehr unterhalb des Niveaus der Hochebene durch. Demzufolge fehlt das lokale Steiggebiet am oberen Luvhang und die maximale Gegenströmung über dem Talboden beträgt nur noch $u = -0,3 \text{ m/s}$. Diese weitgehende Entkoppelung wird durch die höhere Schichtungsstabilität in zweifacher Weise verursacht: sowohl die turbulenten vertikalen Impulstransporte als auch die geordneten Vertikalbewegungen werden durch den thermischen Rücktrieb stark ausgedämpft.

In den Feldern der lateralen Windkomponente v ist die gut ausgeprägte und das ganze Tal erfassende hangparallele Strömung senkrecht zur Richtung von $v_{h,g}$ zu erkennen. Diese ist nach dem vorstehenden völlig unabhängig von den Querkomponenten der Überströmung. Sie ist vielmehr nur abhängig von der lateralen Komponente der aufgeprägten Druckkraft bzw. der Richtung des geostrophischen Windes und ist in gleicher Weise als "Kanalströmung" zu deuten wie die hangparallelen Windkomponenten unterhalb der abgehobenen Grenzschicht im Lee des Berges (s. o. S 135).

Das wird wieder besonders anschaulich für den Fall der rechtsgerichteten Schräganströmung mit $\alpha_g = -30^\circ$ (s. Abb. 42). Die Gleichgewichtsströmung am Einströmrand produziert eine positive Querkomponente v von maximal nur $0,3 \text{ m/s}$, die von der Isolinenanalyse nicht mehr erfaßt wird. Im gesamten Talbereich weht dagegen ein der lateralen Komponente von $v_{h,g}$ entgegengerichteter Wind mit einem Maximum nahe $2,0 \text{ m/s}$ in halber Hanghöhe über der Talmitte.

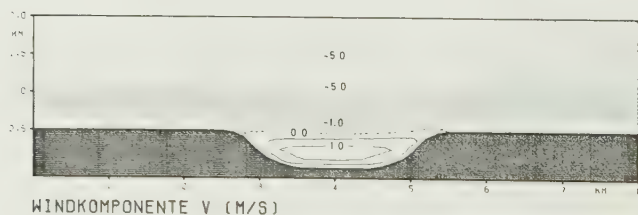


Abb. 42: Windkomponente v (m/s) für schräge Überströmung mit $\alpha_g = -30^\circ$, $|v_{h,g}| = 10 \text{ m/s}$ und $\gamma_g = 0.65 \text{ K/100m}$

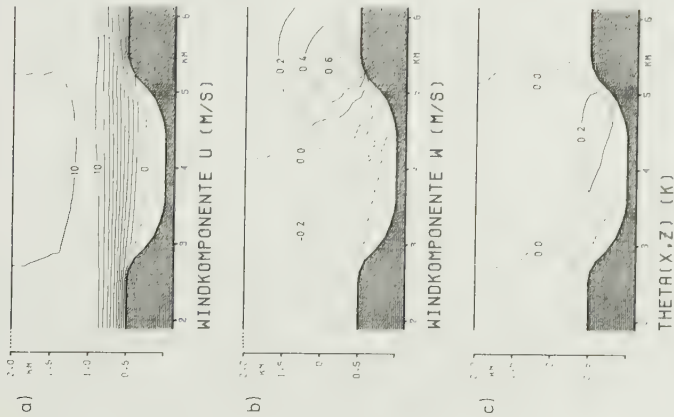


Abb. 43.2 :

Überströmung mit

$|v_{h,g}| = 10 \text{ m/s}$, $v_g = 0.65 \text{ K/100 m}$
bei thermischen heatingen Boden

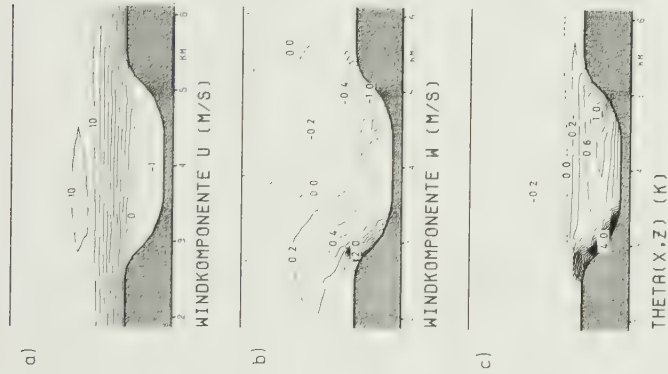


Abb. 43.3 :

Überströmung mit

$|v_{h,g}| = 10 \text{ m/s}$, $v_g = 0.65 \text{ K/100 m}$
bei erwärmtem Leehang (+ 4 K)

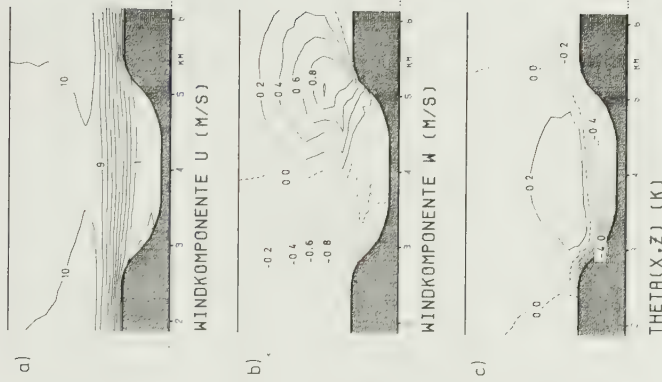


Abb. 43.4 :

Überströmung mit

$|v_{h,g}| = 10 \text{ m/s}$, $v_g = 0.65 \text{ K/100 m}$
bei unterkühltem Leehang (- 4 K)

Die Abbildung 43 zeigt den Vergleich der Überströmungen mit $|\mathbf{v}_{h,g}| = 10 \text{ m/s}$ bei stabiler Schichtung des Referenzzustandes ($\gamma_g = 0.65 \text{ K/100 m}$) für verschiedene thermische Beschaffenheit des Leeanges. In Abb. 43.1 ist das gesamte Tal thermisch neutral, in Abb. 43.2 ist der Leehang um 4 K erwärmt, in Abb. 43.3 um denselben Betrag unterkühlt.

Das erwartete Ergebnis wird qualitativ bestätigt: unterhalb der freien Turbulenzschicht bildet sich im Tal eine thermische Zirkulation nach Maßgabe der Hangtemperatur aus. Abgesehen von nur wenige 100 m mächtigen Gebieten unmittelbar über den Hängen haben diese Zirkulationen nur geringen Einfluß auf die Talüberströmung oberhalb des Niveaus h_0 der Hochebene. Infolge der advektionsbedingt geringen vertikalen Eindringtiefe des Störtemperaturfeldes erreicht der Hangaufwind gegen die rücktreibende stabile Schichtung nur ein Maximum von $w = 2,0 \text{ m/s}$ im Niveau h_0 über dem oberen Hangbereich. Die konvektiven und turbulenten Wärmetransporte sind so gering, daß im schwachen Steiggebiet ($w < 0,5 \text{ m/s}$) über dem Leeang bereits im oberen Teil der freien Turbulenzschicht negative Temperaturstörungen bis $-0,3 \text{ K}$ auftreten.

Im Konfluenzbereich der Anströmung und des thermischen Aufwindes wird ein dynamischer Überdruck von maximal $0,07 \text{ mb}$ erzeugt (s. Abb. 44). Das sind fast 30% des Staudrucks der ungestörten Anströmung im Niveau des dynamischen Druckmaximums. Auch das Überdruckgebiet oberhalb der Luvhangkante ist nur dynamisch durch den Stau der bereits unterhalb des Niveaus h_0 wieder am Hang anlegenden Strömung zu deuten. Im Talbereich ist die Stördruckverteilung dagegen weitgehend hydrostatisch bedingt. Das läßt sich in diesem Fall sogar quantitativ überzeugend bestätigen, weil für den zentralen Talbereich in sehr guter Näherung die hydrostatische Balance von Druck- und Auftriebsbeschleunigung erfüllt ist. Aus Abb. 43.2 c ist für die über die Taltiefe h_0 gemittelte Temperatur-

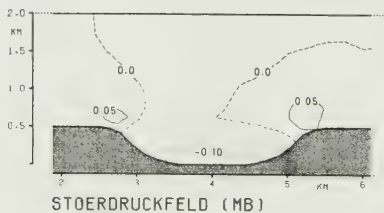


Abb. 44 : Zu Abb. 43.2 gehörige Druckverteilung (mb)

störung $\bar{\psi}_{-h_0} \approx +0,7 \text{ K}$ abzulesen. Damit ergibt sich ein hydrostatisches Bodendruckdefizit gegenüber $p(h_0)$ von

$$\delta p \approx -g h_0 \rho_0 \frac{\bar{\psi}_{-h_0}}{\theta_0} \approx -0,12 \text{ mb}.$$

Der berechnete Bodendruck liegt im zentralen Talbereich fast konstant bei $-0,14 \text{ mb}$. Darüber hat der berechnete Druck im Niveau h_0 einen Wert von $-0,03 \text{ mb}$ (s. Abb. 44). Das Bodendruckdefizit gegenüber diesem Wert beträgt also $-0,11 \text{ mb}$ und stimmt damit fast exakt mit der hydrostatisch abgeschätzten Druckerniedrigung überein.

Sowohl die Isothermen als auch die Isobaren des überwiegend hydrostatischen Druckfeldes sind im mittleren Talbereich horizontal ausgerichtet. Diese Verteilung resultiert einerseits aus den horizontalen Temperaturadvektionen innerhalb der Talzirkulation und andererseits aus der Erwärmung durch das kompensatorische Absinken über dem Luvhang.

Dieses Sinken über dem thermisch neutralen Hang erreicht $w \approx -1,0 \text{ m/s}$ und produziert ein sekundäres Temperaturmaximum von $1,2 \text{ K}$. Die zum warmen Hang gerichtete Ausgleichsströmung erreicht im unteren Talbereich ein Maximum von $1,7 \text{ m/s}$.

Das katabatische Windsystem über dem unterkühlten Leehang (Abb. 43.3) löst die Talzirkulation vollständig auf, so daß im gesamten Talbereich keine negativen u -Komponenten mehr auftreten. Der Hangabwind erreicht bei größtem Sinken von $w = -1,1 \text{ m/s}$ einen maximalen Betrag von $1,7 \text{ m/s}$. Der Aufwind über dem gegenüberliegenden Hang ist sehr schwach und erreicht nur im oberen Bereich $0,5 \text{ m/s}$. Die Windgeschwindigkeiten bleiben fast im gesamten Talgebiet kleiner als in der durch den warmen Leehang ausgelösten Zirkulationsströmung. Trotzdem beeinflußt aber der um den gleichen Betrag von 4 K unterkühlte Hang einen wesentlich größeren Bereich der Strömung oberhalb der Turbulenzschicht, wie ein Vergleich der Vertikalgeschwindigkeitsfelder (Abb. 43.2 b und 3 b) zeigt: noch oberhalb der Durchmischungszone tritt Sinken bis $w = -0,8 \text{ m/s}$ auf. Durch die großräumige Absinkbewegung wird ein Wärmegebiet mit $\vartheta > 0,2 \text{ K}$ erzeugt, das die gesamte Turbulenzschicht erfaßt und sich infolge der horizontalen Advektion fast über die ganze Talbreite erstreckt.

5.4 BESCHLEUNIGUNGSANALYSE

Zur Deutung besonderer Strömungserscheinungen sind im Verlauf der vorangegangenen Ergebnisdiskussionen wiederholt Abschätzungen über die bei der Hindernisüberströmung bzw. der thermischen Konvektion auftretenden Beschleunigungen gemacht worden. Diese hatten sich insbesondere im Zusammenhang mit der für Grenzschichtablösung und Blockierung maßgeblichen Bodendruckverteilung bewährt. Der Versuch einer Analyse des dynamisch bedingten Stördruckanteils basierte auf einfachsten Mittelwertabschätzungen für die stationären Trägheitsbeschleunigungen im berechneten Geschwindigkeitsfeld. Gerade weil sich dabei z.T. außerordentlich hohe Übereinstimmungen mit den numerisch berechneten Druckverteilungen ergaben, besteht der Wunsch, diese Auswertungen im nachhinein durch eine objektive feldmäßige Analyse aller Beschleunigungen aus den berechneten Verteilungen von $\mathbf{v}$, p , ϑ und K_M zu bestätigen. Abgesehen davon liefern die Beschleunigungsfelder eine Möglichkeit, an konkreten Fällen die üblichen scaleanalytischen Befunde über die relative Bedeutung der einzelnen Terme in den Komponenten der Bewegungsgleichung zu verifizieren.

Zunächst soll jedoch eine Bemerkung über die hier verwendete Begriffsbezeichnung gemacht werden. Im Verlauf der Ergebnisdiskussion ist bei den Versuchen, die charakteristischen Erscheinungen der Strömung über steiler Topographie dynamisch zu deuten, mit *Beschleunigungen* argumentiert worden. Begrifflich sauberer hätten dabei stets die entsprechenden *massenspezifischen Kräfte* genannt werden müssen. Dies hätte bei der häufigen Nennung der verschiedenen Kräfte jedoch zu sehr schwerfälligen Formulierungen geführt. Deshalb sind diese durchweg mit den Beschleunigungen identifiziert worden, die sie bei jeweils alleiniger Anwesenheit dem Massenelement im Kontinuum erteilen würden. Diese im Hinblick auf die Maßeinheiten oben drein anschaulichere Betrachtungsweise soll auch im folgenden beibehalten werden.

Eine weitere Vorbemerkung betrifft die Interpretation und damit die Vereinbarung über das Vorzeichen der stationären Beschleunigung $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ im Strömungsfeld. Im folgenden soll die d' ALAMBERTsche Betrachtungsweise der Bewegungsgleichung als Kräftebalance in Bezug auf das beschleunigte Massenelement verwendet werden. D.h. statt $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ wird die massenspezifische d' ALAMBERTsche Trägheitskraft $-\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ analysiert. Das hat formal den Vorteil, daß jede am Ergebnis festgestellte Abweichung von der Beschleunigungsbalance

$$-\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - f \mathbf{k} \times \mathbf{v}_h - \frac{1}{\rho_0} \nabla p + g \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} + \nabla \cdot [\mathbf{K}_h(\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla)] + f \mathbf{k} \times \mathbf{v}_{hg} = 0 \quad (5.2)$$

identisch ist mit dem Residuum, um das die mit dem GALERKIN-Kriterium gewonnene Näherungslösung $\{\hat{\mathbf{v}}, \hat{p}, \hat{\beta}, \hat{\mathbf{K}}_h\}$ diese Differentialgleichung "verfehlt". Auf diese Weise vermittelt bereits die Zusammenschau der Beschleunigungsfelder unmittelbar eine Fehlerabschätzung und gegebenenfalls Hinweise auf eine zu geringe Auflösung der Elementdiskretisierung in gradientstarken Gebieten.

Zur dynamischen Interpretation im Sinne des zweiten NEWTONschen Axioms müssen dann nur die Felder der kartesischen bzw. stromlinienorientierten Trägheitsbeschleunigungskomponenten jeweils mit umgekehrtem Vorzeichen als die entsprechenden Komponenten der konvektiven Beschleunigung $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ gelesen werden.

Bei der numerischen Berechnung der Beschleunigungen ist die Unstetigkeit aller Ableitungen der globalen Approximationsfunktionen auf den Elementrändern zu berücksichtigen. Auf das daraus resultierende Problem der Definition und Berechnungsvorschrift für die Ableitungen an den Knotenpunkten wurde oben im Zusammenhang mit der Modellnumerik eingegangen (s. Kap. 4.3). Dort war vorgeschlagen worden, sämtliche Ableitungen an Knotenpunkten gemäß (4.23) zu bestimmen als gewichtete Mittel über ihre lokal berechneten Werte in allen Elementen, denen der betreffende Knotenpunkt angehört. Auf dieser Basis sind alle in der ersten und dritten Komponente der Bewegungsgleichung auftretenden Beschleunigungsanteile berechnet worden. Wegen der geringeren Aussagekraft der kartesischen Komponenten der Trägheitsbeschleunigung wurden zusätzlich die Tangential- und Normalkomponenten in der x - z -Ebene analysiert, wobei das auf S109 vereinbarte natürliche Koordinatensystem zugrundegelegt wurde. Die so definierten Komponenten

$$\begin{aligned} \mathbf{t} \cdot (-\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) &= -v \frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{1}{v} \left[u \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) + w \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \\ \mathbf{n} \cdot (-\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) &= -\frac{v^2}{R_s} = -\frac{1}{v} \left[w \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) - u \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$(v =: \sqrt{u^2 + w^2})$$

weichen nur geringfügig von den Beträgen der vollständigen tangentialen Trägheitsbeschleunigung bzw. der Zentrifugalbeschleunigung ab, weil die laterale Beschleunigungskomponente $\mathbf{j} \cdot (-\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v})$ im ganzen Gebiet um eine Größenordnung kleiner ist als die Komponenten in der x - z -Ebene.

In Abb. 45 ist die feldmäßige Verteilung der dominierenden Beschleunigungskomponenten für den Fall der Bergüberströmung mit $|\mathbf{v}_{h,g}| = 10 \text{ m/s}$ bei stabiler Schichtung mit $\gamma_g = 0.65 \text{ K/100 m}$ dargestellt (vgl. hierzu Abb. 18.2). Für die Horizontalkomponente sind dies die Trägheits-, die Druck- und mit Einschränkung (s.u.) die Reibungsbeschleunigung (Abb. 45 a-c). Die Beträge dieser Beschleunigungsfelder zeigen, daß die *CORIOLIS*-Beschleunigung für die Dynamik der erzwungenen Konvektion über steiler Topographie in diesem Scale völlig bedeutungslos ist, denn $f v$ erreicht maximal Werte von $0,04 \text{ cm/s}^2$ und bleibt damit betragsmäßig um zwei bis drei Größenordnungen kleiner als die Beschleunigungskomponenten $-\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}$ und $-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}$. Auf die Darstellung des Feldes $f v(x, z)$ wird daher verzichtet, zumal es identisch mit dem in Einheiten 10^{-2} cm/s^2 gelesenen $v(x, z)$ -Feld der Abb. 18.2 ist.

Die vertikale Beschleunigungsbilanz wird im wesentlichen von den z -Komponenten der Trägheits-, Druck- und Auftriebsbeschleunigung bestimmt (Abb. 45 d-f); hier ist die Reibungsbeschleunigung vernachlässigbar.

Die höchsten Beträge werden von den Horizontalkomponenten der Trägheits- und Druckbeschleunigung mit jeweils knapp 14 cm/s^2 erreicht. Das entspricht mehr als dem Hundertfachen des Betrages der treibenden Druckbeschleunigung $-\frac{1}{\rho_0} \nabla_h p_0$! Diese extrem hohen Beschleunigungen sind auf die unmittelbare Umgebung des Berggipfels beschränkt (s. Abb. 45 a, b). Jedoch bleiben beide auch im gesamten übrigen Integrationsgebiet in der Größenordnung 1 cm/s^2 und damit um mindestens eine Zehnerpotenz über den Beträgen der *CORIOLIS*- und Druckbeschleunigung in der ungestörten Gleichgewichtsströmung. Die Reibungsbeschleunigung erreicht vergleichbare Werte nur im Gebiet der maximalen Windscherung in Bodennähe oberhalb des Gipfels und am oberen Luvhang. Außerhalb dieses lokalen Maximums erreicht sie dann jedoch selbst im Bereich der abgehobenen Grenzschicht bzw. im Übergangsgebiet zwischen ihr und der bodennahen Gegenströmung höchstens Beträge von $0,2 \text{ cm/s}^2$. Vorzeichenmäßig kommt in Abb. 45 c die überwiegend verzögernde Wirkung des turbulenten Impulstransportes oberhalb der Ablöselinie bzw. seine "Mitreibwirkung" auf die darunterliegende Schicht zum Ausdruck. Durch diese betragsmäßigen Relationen außerhalb der unmittelbaren Bodenschicht wird die im Zusammenhang mit den Modellapproximationen formulierte Annahme bestätigt, daß die für die Überströmung sehr steiler Topographie charakteristischen Erscheinungen von der *Struktur* des Turbulenzfeldes nur modifiziert, nicht aber wesentlich bestimmt werden. Gerade im Hinblick auf die Erklärung der Ablösung ist klar, daß im Zusammenhang solcher Phänomene die wichtigste Funktion der Turbulenzglieder in der Erhöhung der Differentialgleichungsordnung liegt, wodurch die Berücksichtigung der Haftbedingung am Boden ermöglicht wird. Maßgeblich ist darüberhinaus nur die vertikale Erstreckung der Grenzschicht, die in ausreichender Näherung aber bereits durch die *mittlere Größenordnung* der turbulenten Viskosität gegeben ist. Dieser Befund wurde im Rahmen der vorliegenden Arbeit auch experimentell bestätigt: Während der numerischen Testphase wurden Simulationen mit konstanter turbulenter Viskosität ($5 - 20 \text{ m}^2/\text{s}$) durchgeführt, die zumindest qualitativ sehr ähnliche Ergebnisse brachten wie die mit rückkoppelnd berechnetem K_M -Feld durchgeführten Experimente.

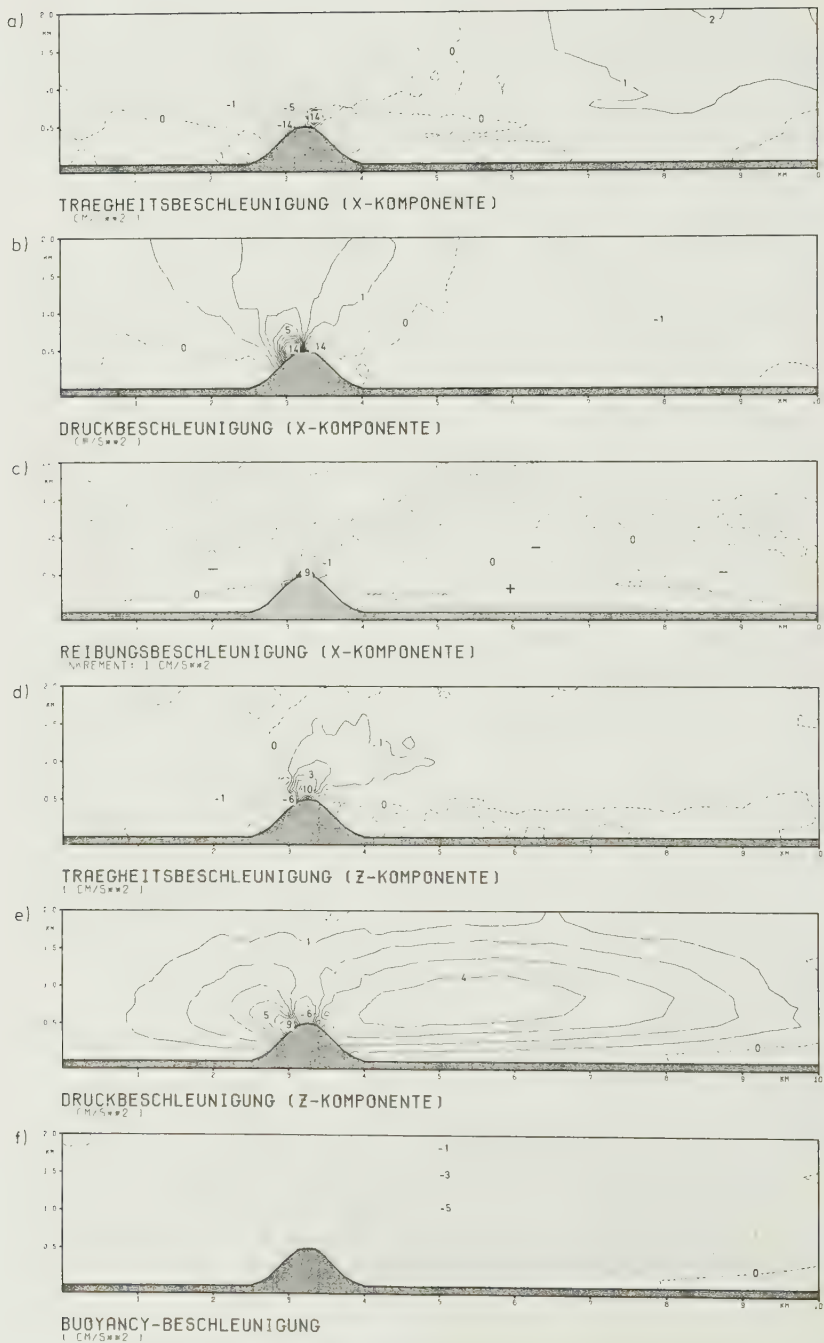


Abb. 45: Beschleunigungsanalyse für die Bergüberströmung mit $u_g = 10 \text{ m/sec}$ und $\gamma_g = 0.65 \text{ K/100m}$ (vgl. Abb. 18.2)

Während sich die Horizontalkomponenten der Trägheits- und Druckbeschleunigung fast im gesamten Gebiet weitestgehend ausbalancieren, zerfällt die $x-z$ -Ebene bezüglich des vertikalen Beschleunigungsgleichgewichts in ganz unterschiedliche "Schauplätze": Unmittelbar über dem Gipfel dominiert die Vertikalkomponente der Trägheitsbeschleunigung, die dort fast identisch mit der nach oben gerichteten Zentrifugalbeschleunigung ist, mit einem maximalen Betrag von fast 10 cm/s^2 . In diesem kleinen Gebiet kompensiert sie im wesentlichen allein die Summe von Druck- und Auftriebsbeschleunigung, die dort Extremwerte von -6 bzw. -4 cm/s^2 erreichen. Über dem Luvhang treten große negative Vertikalkomponenten der Trägheitsbeschleunigung auf mit Werten bis fast -6 cm/s^2 oberhalb der blockierten Anströmung. In diesem Gebiet erreicht die vertikale Druckbeschleunigung $+9 \text{ cm/s}^2$ und die rücktreibende Buoyancy-Beschleunigung nach Abb. 45 f etwa -3 cm/s^2 . Hier also balanciert sich die Summe von Trägheits- und Auftriebsbeschleunigung mit der Druckbeschleunigung aus. In horizontalen Entfernungen vom Gipfel von rund $1,5 \text{ km}$ (das entspricht der Abmessung der Bergbasis) sinken die Beträge der vertikalen Trägheitsbeschleunigung unter 1 cm/s^2 . Während stromaufwärts auch die Druck- und Auftriebsbeschleunigung rasch abnehmen, dominieren sie im Lee bis hin zum Ausströmrand, wo sie im Niveau der Gipfelhöhe immer noch Beträge bei 1 cm/s^2 haben. Vom Bereich der größten Horizontalgeschwindigkeiten an stromabwärts wird die Abweichung von der hydrostatischen Balance $-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + g \frac{\delta \rho}{\rho_0} = 0$ immer kleiner, wie ein Vergleich der Abbildungen 45 e und f zeigt. In der eigentlichen Nachlaufströmung ($x \gtrsim 7,5 \text{ km}$) schließlich ist dieses Gleichgewicht in sehr guter Näherung realisiert, wird aber bereits in der Umgebung des Ausströmrandes bedeutungslos, wo sich schon im zugehörigen Windfeld der Abb. 18.2 eine weitgehende Adaptation an die vertikalschleunigungsfreie *EKMAN*-Gleichgewichtsströmung unmittelbar außerhalb des Integrationsgebietes angedeutet hatte.

Abb. 46 enthält die zu Abb. 45 gehörenden Felder der nach (5.3) berechneten Tangential- und Normalkomponente von $-\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ in der Integrationsebene. Der Vergleich mit den Abbildungen 45 a und 45 d zeigt, daß für diese wellenfreie Überströmung außerhalb der unmittelbaren Umgebung des Berges die Beschleunigungskomponenten $\mathbf{i} \cdot (-\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v})$ und $\mathbf{j} \cdot (-\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) = -v \frac{\partial v}{\partial s}$ einerseits bzw. $\mathbf{k} \cdot (-\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v})$ und $\mathbf{n} \cdot (-\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) = -\frac{v^2}{R_s}$

andererseits fast identisch sind. In Bergnähe und insbesondere über dem Luvhang im Gebiet der hohen Vertikalgeschwindigkeiten werden jedoch die Unterschiede zwischen den kartesischen und den stromlinienangepaßten Komponenten groß: Zu den betragsmäßig hohen vertikalen Trägheitsbeschleunigungen bis zu -6 cm/s^2 tragen mit Rücksicht auf den Vorzeichenunterschied zwischen Vertikal- und Normalkomponente ($\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} < 0$) die tangentielle Geschwindigkeitsänderung und die Zentrifugalbeschleunigung im Verhältnis $2 : 1$ bei. Die extrem großen aufwärts gerichteten Zentrifugalbeschleunigungen dicht über dem Gipfel (Abb. 46 b) haben ihre Ursache weniger in der Stromlinienkrümmung als vielmehr in den hohen bodennahen Geschwindigkeiten, von denen sie quadratisch abhängen (vgl. Abb. 18 bzw. die Profildarstellung in Abb. 21).

Die luvseitige Vorverlagerung des Gebietes hangwärts gerichteter Zentrifugalbeschleunigung ($\mathbf{n} \cdot (-\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) > 0$ in Abb. 46 b bzw. $\mathbf{k} \cdot (-\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) < 0$ in Abb. 45 d) ist eine Folge der virtuellen Ab-

flachung des unteren Hangbereichs durch die bodennahe Blockierung. Analog erklären sich die noch in weiterer Entfernung vom Leehang großen Normalbeschleunigungen mit $\mathbf{n} \cdot (-\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) < -1 \text{ cm/s}$ als Folge der Grenzschichtablösung bzw. des Leerrotors.



Abb. 46 : Zu Abb. 45 gehörige Tangential- und Normalbeschleunigungs-komponenten

Abb. 46 b gestattet eine Bestätigung des früheren Befundes, daß die Zentrifugalbeschleunigung einen nicht zu vernachlässigenden Beitrag zur Bodendruckerrhöhung am (und vor dem) Luvhang leistet. Entlang einer Strecke von $\delta n = 1000 \text{ m}$ läßt sich eine stromliniennormal gemittelte Zentrifugalbeschleunigung von 1 cm/s^2 ansetzen. Deren Beitrag zum Bodendruck ist aber ungefähr $\delta p \approx \rho_0 \cdot \mathbf{n} \cdot (-\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) \cdot \delta n \approx 0,1 \text{ mb}$ und erreicht damit die Größenordnung des durch die Hebungsabkühlung induzierten hydrostatischen Bodendruckanteils.

Anhand einer Darstellung der vertikalen Beschleunigungsbilanz soll für das in Abb. 23.6 gegebene Beispiel einer Wellenströmung die Deutung des Leewellenrotors bestätigt werden. Abb. 47 zeigt für diesen Fall das $(\mathbf{u} \mathbf{i} + \mathbf{w} \mathbf{k})$ -Vektorfeld, die zugehörigen Vertikalkomponenten der Trägheits-, Druck- und Auftriebsbeschleunigung sowie die Horizontalkomponente der Druckbeschleunigung.

Die $\mathbf{k} \cdot (-\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v})$ -Verteilung in Abb. 47 b ist mit umgekehrtem Vorzeichen ($\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} < 0$!) insbesondere im Bereich der Wellenberge und -täler weitgehend als Feld der Zentrifugalbeschleunigung zu lesen. Die gezeigten Felder bestätigen den auf S 109 schon durch eine einfache Abschätzung gewonnenen Befund, daß für die Bodendruckverteilung und damit die bodennahen Druckbeschleunigungen der hydrostatische Stördruckanteil maßgeblich ist. Im linken Teil des Wellentals bei $x \approx 5 \text{ km}$

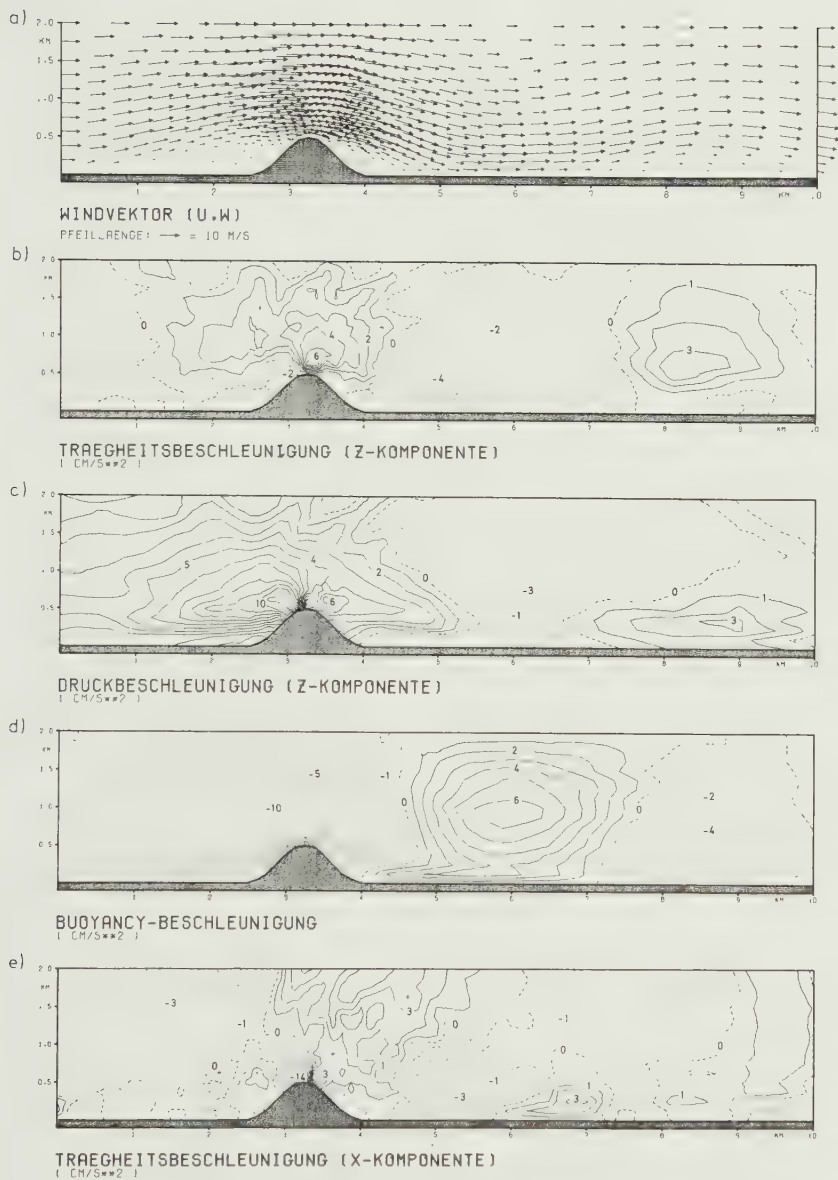


Abb. 47 : Beschleunigungsanalyse für die Wellenströmung mit
 $u_g = 10 \text{ m/sec}$ und $\gamma_g = 0.20 \text{ K/100m}$ (vgl. Abb. 23.6)

hat die bodennahe horizontale Druckbeschleunigung ihr Maximum von über 4 cm/s^2 . Nach Abb. 47 b hat aber die zum Boden gerichtete Zentrifugalbeschleunigung fast genau an dieser Stelle ebenfalls ihr Maximum. Sie liefert dort ihren größten Beitrag zur Bodendruckerhöhung, d.h. trägt an dieser Stelle wegen $\frac{\partial p_{\text{dyn}}}{\partial x} \approx 0$ nichts zur horizontalen Druckbeschleunigung bei. Beachtet man jedoch nun, daß das Buoyancy-Beschleunigungsfeld als Feld der Temperaturstörung (in Einheiten $0,3 \text{ K}$) gelesen werden kann, so weist Abb. 47 d aus, daß dort die vertikal gemittelte Temperatur und damit der hydrostatisch induzierte Bodendruckanteil ein starkes Gefälle in Strömungsrichtung hat.

Von der Mitte des Wellentals bis zum folgenden Wellenberg schließt sich ein Gebiet bodennaher Druckbeschleunigungen an, die zum Berg gerichtet sind ($-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} < 0$). Am Ende dieser "Bremsstrecke" tritt dann der im vorliegenden Fall noch schwache Leewellenrotor auf (vgl. Abb. 23.6 e). Im Bereich der größten gegenläufigen Druckbeschleunigung am Boden (in Abb. 47 e bei $x \approx 7 \text{ km}$) wäre aufgrund der durch die Zentrifugalbeschleunigung induzierten Bodendruckerhöhung nach Abb. 47 b aber gerade eine Druckbeschleunigung in Strömungsrichtung zu erwarten. Wiederum zeigt die als Φ -Feld interpretierte Abb. 47 d, daß dort die horizontale Abfolge von Absinkerwärmung und Hebungsabkühlung in der Welle das größte Gefälle des hydrostatischen Bodendruckanteils zum Berg hin erzeugt. Damit ist bestätigt, daß sich beim Aufbau der bodennahen "Bremsstrecke" im ansteigenden Teil der Welle die hydrostatisch induzierte gegen die dynamisch bedingte Druckbeschleunigung durchsetzt. Umgekehrt bedeutet das: die Zentrifugalbeschleunigung vor dem Wellenberg wirkt der Bildung des Rotors entgegen.

Die schon bei der Ergebnisdiskussion für kleine Anströmstärke oder hohe Schichtungsstabilität festgestellte unzureichende Entfernung des Einströmrandes vom Berg kommt natürlich auch in den Beschleunigungsfeldern zum Ausdruck. Die festen Randbedingungen im Einflußbereich der weit stromaufwärts reichenden Blockierung produzieren insbesondere unrealistische Normalbeschleunigungen unmittelbar hinter dem Einströmrand.

Abschließend soll noch eine Vorstellung von der Größenordnung der nichtlinearen Trägheitsbeschleunigungen bei thermischer Konvektion vermittelt werden. Dazu dient als Beispiel der in Abb. 37.2 dargestellte Fall des um 4 K erwärmten Hanges bei schwach stabiler Schichtung im Grundzustand ($\gamma_g = 0,80 \text{ K/100 m}$).

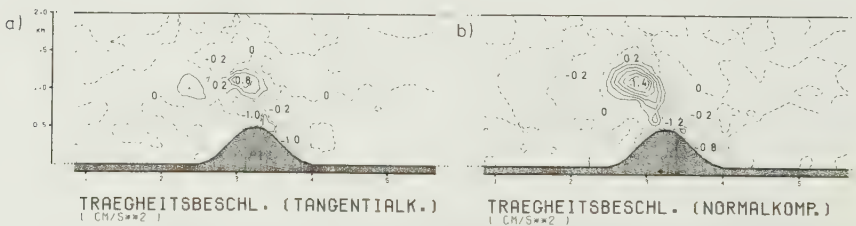


Abb. 48 : Tangential- und Normalkomponenten der Trägheitsbeschleunigung bei thermischer Konvektion über erwärmtem Hang ($+4 \text{ K}$)

Der Vergleich mit den entsprechenden Feldern bei erzwungener Konvektion mit $u_g = 10 \text{ m/s}$ zeigt, daß die Beträge der Trägheitsbeschleunigung um eine Größenordnung kleiner sind als bei der Bergüberströmung. Im hangparallelen Aufwindbereich bzw. unmittelbar über dem Gipfel erreicht die Tangentialkomponente der Trägheitsbeschleunigung Beträge von knapp über 1 cm/s^2 . (Die negativen Gebiete in Abb. 48 a entsprechen positiven konvektiven Geschwindigkeitsänderungen!). Oberhalb 1 km Höhe kehrt die Auftriebsbeschleunigung in der stabilen Schichtung ihre Richtung um und verzögert das weitere trägheitsbedingte Aufsteigen. Das kommt in Abb. 48 a durch das Gebiet positiver $\mathbf{t} \cdot (-\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v})$ -Werte, d.h. negativer Tangentialbeschleunigungskomponenten zum Ausdruck. Etwas größere Beträge erreichen in diesem Gebiet die aufwärts weisenden Zentrifugalbeschleunigungen mit maximal $0,15 \text{ cm/s}^2$. Sowohl die erzwungene Stromlinienkrümmung im unteren Hangbereich als auch die leichte Aufsteilung des Thermikschlauches oberhalb des Gipfels machen sich in Abb. 48 b durch Gebiete maximaler hangwärts gerichteter Zentrifugalbeschleunigungen bemerkbar (dort ist jeweils $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} > 0$ und $\mathbf{n} \cdot (-\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) < 0$).

Nur in der unmittelbaren Umgebung des erwärmten Hanges sind Auftriebs- und Druckbeschleunigung deutlich größer als die Trägheitsbeschleunigung. Schon oberhalb 200 m über dem Gipfelniveau haben dann aber alle drei Beschleunigungen die gleiche Größenordnung.

Zusammenfassend läßt sich aus den numerischen Beschleunigungsanalysen die Bestätigung eines Befundes ableiten, der üblicherweise ohne Zuhilfenahme approximativer Lösungen durch Skalierung in den Differentialgleichungen gewonnen wird: Für die Dynamik von Strömungen, die von geometrischen und thermischen Inhomogenitäten im Größenbereich $L \leq 10 \text{ km}$ bestimmt werden, sind die nichthydrostatischen Druckbeschleunigungen und die vertikalen Trägheitsbeschleunigungen keinesfalls mehr zu vernachlässigen.

ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

Der Verfasser hofft, mit dem vorgelegten Ergebnismaterial nachgewiesen zu haben, daß das in der Einleitung formulierte Ziel dieser Arbeit erreicht werden konnte. Das hier vorgestellte nichtlineare und nichthydrostatische Finite-Elemente-Modell hat für einen weiten Bereich kinematischer, dynamischer und thermischer Bedingungen realistisch erscheinende stationäre Simulationen der Überströmung steiler Topographie produziert. Neben der Verfügbarmachung des Finite-Elemente-Verfahrens für die Untersuchung charakteristischer Strömungen im Mesoscale lag der Konstruktion eines *stationären* Modells die Idee zugrunde, mit vertretbarem Rechenaufwand eine Vielzahl von numerischen Experimenten für möglichst viele Kombinationen der meteorologisch bedeutsamen Parameter durchführen zu können. Im Rückblick auf mehr als 200 Simulationen kann festgestellt werden, daß im Vergleich zu dem üblicheren Vorgehen, mit sehr zeitaufwendigen instationären Modellen entsprechende stationäre Lösungen zu gewinnen, das hier präsentierte Modell trotz seiner algorithmischen Komplexität sehr günstig liegt. Die vollständige Realisierung einer Simulation erforderte im Mittel folgende Inanspruchnahme der zur Verfügung stehenden Anlagen CD CYBER 175 und CD 170-835 (Werte in Klammern): 1100 s (4500 s) CPU-Zeit, jeweils 600 s IO- bzw. 700 s (600 s) PP-Zeit bei maximalem Kernspeicherbedarf von 210 000, Worten. (Diese Angaben beziehen sich auf die Diskretisierung mit 422 Elementen und 3907 Freiheitsgraden.)

Das Modell eignet sich daher zur Durchführung umfangreicher Experimentreihen mit systematischer Parametervariation. Darüberhinaus kann es im praktischen Einsatz zur schnellen Bereitstellung der meteorologischen Variablenfelder für die Simulation der Ausbreitung passiver Luftbeimengungen unter stationären hydrodynamischen Bedingungen dienen.

Bezüglich weiterer Verbesserungen und des wissenschaftlichen Einsatzes dieses Modells haben sich bereits im Verlauf der Arbeit zahlreiche Perspektiven ergeben. Die numerischen Experimente haben gezeigt, daß die horizontale Abmessung des Integrationsgebietes insbesondere für die Anwendung auf erzwungene Konvektion bei hoher Schichtungsstabilität noch erweitert werden muß. Leeseitig kann dann die Nachlaufströmung bis zur Adaptation an das *EKMAN*-Beschleunigungsgleichgewicht verfolgt werden. Meteorologisch weit wichtiger ist aber die Ermöglichung einer quantitativen Untersuchung der weit stromaufwärts reichenden Blockierungen ähnlich derjenigen, wie sie für die leeseitige Ablösung durchgeführt wurde.

Ebenso leicht realisierbar und vom Rechenaufwand her vertretbar ist eine vertikale Ausdehnung des Integrationsgebietes, wobei dann auf die Inkompressibilitätsbedingung verzichtet und eine höhenabhängige Dichte im Grundzustand zugelassen werden muß. Dies sollte vorrangig verwirklicht werden, um das Modell auf Querschnittsebenen des Alpenmassivs anwenden zu können. Hierbei käme insbesondere die hohe und numerisch problemlose Anpassung der Elementdiskretisierung an irreguläre Topographie zur Geltung.

Eine wesentliche Voraussetzung dieses Modells war die Gültigkeit

der Annahme, daß sich unter stationären Rand- und Quellbedingungen auch stationäre Strömungen einstellen. Das erscheint plausibel, ist jedoch keineswegs unter allen Umständen verbürgt, wie das klassische Beispiel der *KÄRMÄN*-Wirbelstraße zeigt. Auch bei den im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Simulationen mit systematischer Parametervariation hatte sich ein Hinweis auf einen instabilen Strömungszustand ergeben: Für kritische Kombinationen von $|\mathbf{v}_{h,g}|$ und γ_g ergaben sich Leewellensysteme mit großer Amplitude, die bei geringfügiger Erniedrigung der Anströmstärke bzw. Erhöhung der Schichtungsstabilität fast spontan (im Sinne der Parametervariation) zusammenbrachen und von einem völlig anderen stationären Strömungstyp abgelöst wurden. Im Rahmen der zeitunabhängigen Modellierung selbst kann nicht geklärt werden, ob diese numerisch stabile Lösung eine mögliche Strömungsform repräsentiert. (Vgl. das synoptische Beispiel der antizyklonalen Gleichgewichtsströmung um ein Tiefdruckzentrum, die zwar theoretisch möglich, aber auf keinem zyklogenetischen Wege realisierbar ist.)

Physikalisch bedeutet das die Frage, ob unter den Bedingungen, die zum Zusammenbruch einer instabilen stationären Strömung bei geringfügiger Zustandsänderung führen, eine Adaptation an ein neues stationäres Beschleunigungsgleichgewicht realisiert werden kann oder ob sich ein periodischer Strömungsvorgang einspielt. Die Klärung solcher Fragen ist von grundlegender Bedeutung für die Beurteilung der Aussagekraft stationärer Modelle. Zur Untersuchung der Übergänge zwischen verschiedenen Strömungstypen in kritischen Parameterbereichen wäre daher die Konstruktion eines zeitabhängigen Vergleichsmodells anzustreben. Dabei ist allerdings nicht von vornherein klar, ob dies im Rahmen vertretbarer Rechenzeiten realisierbar ist, da für die Untersuchung von Strömungen mit wesentlichem Einfluß der konvektiven Beschleunigungen selbstverständlich auf jegliche der "upstream"-Differenzdiskretisierung vergleichbare upwind-Techniken bei der Finite-Elemente-Simulation verzichtet werden muß.

Von der wissenschaftlichen Fragestellung her und mit Blick auf die Anwendung vorrangiger erscheint jedoch die Entwicklung eines dreidimensionalen stationären Finite-Elemente-Modells. Im Vergleich zu den hier dokumentierten zweidimensionalen Simulationen wäre insbesondere eine Untersuchung über den Einfluß der achsenparallelen Druckunterschiede, die auch bei langgestreckten Bergzügen von deren Enden her induziert werden und Anlaß zur Kanalisierung geben, von Interesse. Ebenso wichtig ist die Analyse, in welchem Maß die für die Praxis der Ausbreitungsrechnung wichtigen Ablöse- und Blockierungserscheinungen durch die Zweidimensionalität begünstigt werden. Darüberhinaus könnte gerade mit Rücksicht auf die Vorzüge der Finite-Elemente-Diskretisierung ein wertvoller Beitrag zu den Untersuchungen von Talzirkulationen geleistet werden, für die es keine partielle räumliche Homogenität gibt oder bei denen es, wie z.B. im Fall des Innals, gerade auf die Wechselwirkung zwischen Gebirge und Vorland ankommt.

Ein ideales Anwendungsgebiet für ein dreidimensionales Finite-Elemente-Modell wäre schließlich die Simulation der Gebäudeumströmung zur Berechnung der resultierenden Druckverteilung.

LITERATUR

- 1 ANTHES, R.A. and T.T. WARNER: The development of mesoscale models suitable for air pollution and other mesometeorological studies. Mon. Wea. Rev., 106 (1978), 1045-1078
- 2 ATKINSON, B.W.: Meso-scale atmospheric circulations. Acad. Press, London, 1981
- 3 BEHNKE, W.: Berechnung der Strömungs- und Schichtungsverhältnisse im Oberrheingraben bei Westwindlage. Ann. Met., 16 (1980), 118-121
- 4 BLACKADAR, A.K.: The vertical distribution of wind and turbulent exchange in a neutral atmosphere. J. Geophys. Res 67 (1962), 3095-3102
- 5 BUCHHOLD, M.: Modellrechnungen zur stationären Überströmung von Bergen. Ann. Met., 16 (1980), 222-224
- 6 BUSCH, N.E.: On the mechanism of atmospheric turbulence. In: Workshop on Micrometeorology. D.A. Haugen (ed.) AMS (1973), 1-65
- 7 BUSINGER, J.A., J.C. WYNGAARD, Y. IZUMI, E.F. BRADLEY: Flux profile relationships in the atmospheric surface layer. J. Atm. Sci., 28 (1971), 181-189
- 8 CHRISTIE, I. and A.R. MITCHELL: Upwinding of high order Galerkin methods in conduction-convection problems. Int. J. num. Meth. Eng., 12 (1978), 1764-1771
- 9 CHUNG, T.J.: Finite element analysis in fluid dynamics. Mc Graw-Hill, New York, 1978
- 10 CULLEN, M.J.P.: Integrations of the primitive equations on a sphere using the finite element method. Quart. J. R. Met. Soc., 100 (1974), 555-562
- 11 DANARD, M.: A simple model for mesoscale effects of topography on surface winds. Mon. Wea. Rev., 105 (1977), 572-581
- 12 DAVIES A.J.: The finite element method: A first approach. Clarendon Press, Oxford, 1980
- 13 DAVIS, R.E.: The two-dimensional flow of a stratified fluid over an obstacle. J. Fluid Mech., 36, 1 (1969), 127-143
- 14 DUTTON, J.A. and G.H. FICHTL: Approximate equations of motion for gases and liquids. J. Atm. Sci., 26 (1969), 241-254
- 15 EGGER, J.: On the linear two-dimensional theory of thermally induced slope winds. Beitr. Phys. Atm., 54, 4 (1981), 465-481

- 16 ESTOQUE, M.A.: Numerical modeling of the planetary boundary layer. In: Workshop on Micrometeorology. D.A. Haugen (ed.) AMS (1973), 217-270
- 17 ESTOQUE, M.A. and C. BHUMRAKAR: A method for solving the planetary boundary-layer equations. Bound. Lay. Met., 1 (1970), 169-194
- 18 FIEDLER, F.: Turbulenter Spannungs- und Deformationstensor in der Prandtl-Schicht. Beitr. Phys. Atm., 48 (1975), 290-300
- 19 FINLAYSON, B.A.: The method of weighted residuals and variational principles. Acad. Press, New York, 1972
- 20 FÖRCHTGOTT, J.: Wave streaming in the lee of mountain ridges. Bull. Met. Czech., 3 (1949), 49-51
- 21 FORTAK, H.: Meßtechnische Untersuchung der planetarischen Grenzschicht mit Hilfe eines instrumentierten Motorseglers. Ber. DWD, 149 (1980)
- 22 FURUKAWA, T.: Numerical experiments of the airflow over mountains. J. Met. Soc. Jap., 51, 6 (1973), 400-418
- 23 GRESHO, P.M. and R.L. LEE: Don't suppress the wiggles, they're telling you something. In: Finite element methods for convection dominated flows. T.J.R. Hughes (ed.), AMD 34 (1979), 37-62
- 24 GRIFFITHS, D.F. and A.R. MITCHELL: On generating upwind finite element methods. In: Finite element methods for convection dominated flows. T.J.R. Hughes (ed.), AMD, 34 (1979)
- 25 HINTON, E. and D.R.J. OWEN: Finite element programming. Acad. Press, London, 1977
- 26 HINZE, J.O.: Turbulence. New York, 1959
- 27 HOOD, P.: Frontal solution program for unsymmetric matrices. Int. J. Num. Meth. Eng., 10 (1976), 379-399
- 28 HOOD, P. and C. TAYLOR: Navier-Stokes equations using mixed interpolation. In: Finite element method in flow problems. J.T. Oden, O.C. Zienkiewicz, R.H. Gallagher, C. Taylor (eds.), Univ. Alabama Press, Huntsville, 1974
- 29 HUEBNER, K.H.: The finite element method for engineers. Wiley, New York, 1975
- 30 HUNT, J.C.R.: Wind over hills. In: Workshop on the Planetary Boundary Layer. J.C. Wyngaard (ed.), AMS, Boston, 1980
- 31 IRONS, B.M.: A frontal solution program for finite element analysis. Int. J. Num. Meth. Eng., 2 (1970), 5-32

- 32 KAO, T.W.: The phenomenon of blocking in stratified flows.
J. Geophys. Res., 70, 4 (1965), 815-822
- 33 KUETTNER, J.: The rotor flow in the lee of mountains. Schweizer
Aero - Revue, 33 (1958), 208-215
- 34 LEONARD, B.P.: A survey of finite differences of opinion on
numerical muddling of the incomprehensible defective
confusion equation. In: Finite element methods for con-
vection dominated flows. T.J.R. Hughes (ed.), AMD, 34 (1979)
- 35 LINDEMANN, C.: Leewellen in der Flugmeteorologie. Met. Abh.,
89, 4 (1971)
- 36 LONG, R.R.: Some aspects of the flow of stratified fluids:
III. Continuous density gradients. Tellus VII, 3 (1955),
341-357
- 37 LONG, R.R.: Blocking effects in flow over obstacles. Tellus XXII,
5 (1970), 471-480
- 38 LYKOSOV, V.N. and L.N. GUTMAN: Turbulent boundary layer above
a sloping underlaying surface. Izv. Atm. Oce. Phys., 8, 8
(1972), 799-809
- 39 MAHRER, Y. and R.A. PIELKE: A numerical study of the air flow
over mountains using the two-dimensional version of the
University of Virginia mesoscale model. J. Atm. Sci., 32
(1975), 2144-2155
- 40 MAHRER, Y. and R.A. PIELKE: A numerical study of the airflow
over irregular terrain. Beitr. Phys. Atm., 50 (1977), 98-113
- 41 MARSAL, D.: Die numerische Lösung partieller Differentialglei-
chungen. B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1976
- 42 MASON, P.J. and R.I. SYKES: Three-dimensional numerical inte-
grations of the Navier-Stokes equations for flow over
surface-mounted obstacles. J. Fluid Mech., 91, 3 (1979),
433-450
- 43 MOLENKAMP, C.R.: Accuracy of finite difference methods applied
to the advection equation. Appl. Met., 7 (1968), 160-167
- 44 O'BRIEN, J.J.: A note on the vertical structure of the eddy ex-
change coefficient in the planetary boundary layer. J.
Atm. Sci., 27 (1970), 1213-1215
- 45 OELSCHLÄGEL, D. und W.-G. MATTHÄUS: Numerische Methoden.
Leipzig, 1974
- 46 OLSON, M.D.: Comparison of various finite element solution
methods for the Navier-Stokes equations. In: Finite
elements in water resources. W.G. Gray, G.F. Pinder (eds.),
Pentech Press, London, 1977

- 47 OLSON, M.D. and S.Y. TUANN: Primitive variables versus stream function finite element solutions of the Navier-Stokes equations. In: Finite elements in fluids, Vol.3. R.H. Gallagher, O.C. Zienkiewicz, J.T. Oden, M.M. Cecchi, C. Taylor (eds.), Wiley, 1978
- 48 ORVILLE, H.: On mountain upslope winds. J. Atm. Sci., 21 (1964), 622-633
- 49 PATRINOS, A.A.N. and A.L. KISTLER: A numerical study of the Chicago Lake breeze. Bound. Lay. Met., 12 (1977), 93-123
- 50 PIELKE, R.A.: A three-dimensional numerical model of the sea breezes over South Florida. Mon. Wea. Rev., 102 (1974), 115-139
- 51 PIELKE, R.A. and Y. MAHRER: Representation of the heated planetary boundary layer in mesoscale models with coarse vertical resolution. J. Atm. Sci., 32 (1975), 2288-2308
- 52 PINDER, G.F. and W.G. GRAY: Finite element simulation in surface and subsurface hydrology. Acad. Press, New York, 1977
- 53 PRANDTL, L.: Bemerkungen zur Theorie der freien Turbulenz. Z. angew. Math. Mech., 22 (1942), 241
- 54 PRANDTL, L., K. OSWATITSCH, K. WIEGHARDT: Strömungslehre. Braunschweig, 1969
- 55 PRIESTLEY, C.H.B.: Turbulent transfer in the lower atmosphere. Chicago, 1959
- 56 QUENEY, P. et al.: The airflow over mountains. M.A. Alaka (ed.), WMO Techn. Note 34 (1960)
- 57 ROACHE, P.J.: Computational fluid dynamics. Albuquerque, 1972
- 58 SCHLICHTING, H.: Grenzschichttheorie. Karlsruhe, 1964
- 59 SCHWARZ, H.R.: Methode der finiten Elemente. Teubner, Stuttgart, 1980
- 60 SCORER, R.S.: Theory of airflow over mountains: IV. Separation of flow from the surface. Quart. J. Roy. Met. Soc., 81 (1955), 340-350
- 61 SCORER, R.S.: Environmental Aerodynamics. Chichester, 1978
- 62 SHAFFER, W.A. and P.E. LONG: A predictive boundary layer model. NOAA Techn. Memor. NWS TDL-57, Silver Spring Md., 1975
- 63 SOMA, S.: Dissolution of separation in the turbulent boundary layer and its applications to natural winds. Pap. Met. Geophys., 20, 2 (1969), 111-174

- 64 SOMMERFELD, A.: Vorlesungen über Theoretische Physik. Bd. II :
Mechanik der deformierbaren Medien. Thun, 1978
- 65 STANFORTH, A.N. and H.L. MITCHELL: A semi-implicit finite-
element barotropic model. Mon. Wea. Rev., 105 (1977),
154 - 169
- 66 STANFORTH, A.N. and R.W. DALEY: A baroclinic finite-element
model for regional forecasting with the primitive equations.
Mon. Wea. Rev., 107, 2 (1979), 107 - 121
- 67 TANG, W.: Theoretical study of cross-valley wind circulation.
Arch. Met. Geoph. Biokl. Ser. A, 25 (1976), 1 - 18
- 68 TAPP, M.C. and P.W. WHITE: A non-hydrostatic mesoscale model.
Quart. J. Roy. Met. Soc., 102 (1976), 277 - 296
- 69 TAYLOR, P.A.: Numerical solution of neutrally stratified planet-
ary boundary-layer flow above gentle topography.
Bound. Lay. Met., 12 (1977), 37 - 60
- 70 THYER, N.: Theoretical explanation of mountain air valley winds
by a numerical model. Arch. Met. Geophys. Biokl., B 15,
(1966)
- 71 TONG, P. and J.N. ROSSETTOS: Finite-element method: Basic
technique and implementation. MIT Press, Cambridge, 1977
- 72 WALLINGTON, C.E.: A numerical study of the topographical factor
in lee-wave amplitudes. Quart. J. Roy. Met. Soc., 84
(1958), 428 - 433
- 73 WIEGHARDT, K.: Theoretische Strömungslehre. Stuttgart, 1964
- 74 WIPPERMANN, F.: Meso-Scale Modelle: Auswirkungen verschiedener
Modellannahmen. Ann. Met., 16 (1980), 210 - 212
- 75 WIPPERMANN, F. und G. GROSS: On the construction of orographic-
ally influenced wind roses for given distributions of the
large-scale winds. Beitr. Phys. Atm., 54, 4 (1981), 492 - 501
- 76 WIPPERMANN, F. und F. WALLBAUM: Entwicklung eines meso-skali-
gen numerischen Simulationsmodells zur Untersuchung des
Verhaltens anthropogener Abwärme in der Atmosphäre. In:
Abwärmeprojekt Oberrheingebiet, Veröff. d. Umwelt Bundes
Amtes, Berlin, 1980, 242 - 315
- 77 YAMADA, Y. and K. ITO, Y. YOKOUCHI, T. TAMANO, T. OHTSUBO:
Finite element analysis of steady fluid and metal flow.
In: Finite elements in fluids, Vol. 1. R.H. Gallagher,
J.T. Oden, C. Taylor, O.C. Zienkiewicz (eds.), Wiley,
London, 1975
- 78 ZIENKIEWICZ, O.C.: Why finite elements? In: Finite elements
in fluids, Vol. 1. R.H. Gallagher et al. (eds.), Wiley,
London, 1975

- 79 ZIENKIEWICZ, O.C.: The finite element method in engineering science. Mc Graw-Hill, London, 1977
- 80 GALLAGHER, R.H., J.T. ODEN, C. TAYLOR, O.C. ZIENKIEWICZ (eds.): Finite elements in fluids, Vol.1. Wiley, London, 1975
- 81 GALLAGHER, R.H., J.T. ODEN, C. TAYLOR, O.C. ZIENKIEWICZ (eds.): Finite elements in fluids, Vol.2. Wiley, London, 1975
- 82 GALLAGHER, R.H., O.C. ZIENKIEWICZ, J.T. ODEN, M.M. CECCHI, C. TAYLOR (eds.): Finite elements in fluids, Vol.3. Wiley, Chichester, 1978

LISTE DER NICHT EXPLIZIT BEZEICHNETEN SYMBOLE

Bezüglich aller übrigen Symbole muß wegen der häufig unvermeidbaren Mehrfachverwendung auf die jeweilige Bezeichnung im Text verwiesen werden.

c_p	spezifische Wärme bei konstantem Druck
f	CORIOLIS - Parameter
g	Schwerebeschleunigung
h	Topographiehöhe
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	kartesische Basisvektoren
k	ν . KÁRMÁN - Konstante
R_s	Krümmungsradius der senkrechten Stromlinienprojektion auf die $x-z$ -Ebene
θ_*	Turbulenter Temperaturscale der bodennahen Reibungsschicht
u_*	Schubspannungsgeschwindigkeit
$u_g = \mathbf{i} \cdot \mathbf{v}_{h,g}$ $v_g = \mathbf{j} \cdot \mathbf{v}_{h,g}$	} kartesische Komponenten des geostrophischen Windvektors
$\mathbf{v}_{h,g}$	
$\mathbf{v}_{h,g}$	geostrophischer Windvektor
$\mathbf{v}_h = u \mathbf{i} + v \mathbf{j}$	horizontale Windvektorkomponenten
$\mathbf{v} = u \mathbf{i} + w \mathbf{k}$	vektorielle Windkomponente in der $x-z$ -Ebene
x, y, z	kartesische Koordinaten
z_o	Rauigkeitslänge
$z_R = z - h$	Höhe bezüglich der Bodentopographie
$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$	Gradientoperator
$\nabla_h = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y}$	

LEBENS LAUF

NAME: Klaus-Michael Riesener

WOHNUNG: 1000 Berlin 37, Claszeile 83

GEBOREN: 17.05.1947 in Aken/Elbe

ELTERN: Karl Riesener (Angest.; verst. 1952)
Charlotte Riesener (Rentnerin)

AUSBILDUNG: Einschulung 1953, Süd-Schule, Berlin-37
Gymnasium (math.-naturw. Zweig) 1959,
Droste-Hülshoff-Gymnasium, Berlin-37
Abitur: März 1966
Studienbeginn Meteorologie: April 1966,
FU Berlin
Diplom- Vorprüfung: Sept. 1969
Diplom- Hauptprüfung (mündl.): Aug. 1972
Studentischer Mitarbeiter am Institut für
Theoretische Meteorologie der FU Berlin:
Okt. 1973 - April 1975
Abschluß der Diplom-Hauptprüfung: April 1975

BERUFSPRAXIS: Wissenschaftlicher Angestellter (befristet)
am Institut für Theoretische Meteorologie
der FU Berlin: Juni 1975 - Juni 1976
Wissenschaftlicher Assistent für das Fach
Theoretische Meteorologie im Fachbereich
Geowissenschaften der FU Berlin:
Juli 1976 - Juni 1981
Wissenschaftlicher Mitarbeiter (befristete
Förderung durch die Deutsche Forschungsgemein-
schaft) am Institut für Theoretische Meteorolo-
gie der FU Berlin: Jan. 1982 - Dez. 1982

FAMILIENSTAND: Verheiratet seit April 1971 mit
Ingrid Riesener, geb. Reuscher (Mag. Theol.),
zwei Kinder: Kathrin (1971), Tina-Maria (1977)

